Projeto de AB-272 - 1o bimestre de 2019

Professor: Flavio Ribeiro e Mauricio Morales

1 Introdução

Esse trabalho tem por objetivo principal realizar uma revisão de alguns métodos numéricos para integração de Equações Diferenciais Ordinárias, em particular através de aplicações para sistemas Hamiltonianos.

O aluno deverá fazer uma análise de cada um dos métodos, em relação a características de estabilidade, preservação do Hamiltoniano, tempo de computação, etc.

Alguns conceitos básicos sobre sistemas Hamiltonianos também devem ser discutidos através desse trabalho.

Um objetivo secundário do trabalho é a dedução das equações Hamiltonianas através de uma biblioteca de matemática simbólica (SymPy), bem como a geração das funções de simulação de maneira automática.

2 Métodos numéricos

Os seguintes métodos serão estudados no presente trabalho:

1. Euler
2. Euler implícito
3. Midpoint implicit
4. Método do Trapézio
5. Runge-Kutta de 4a ordem
6. Euler assimétrico A
7. Euler assimétrico B
8. Stõrmer-Verlet

Notar que os métodos acima já foram implementados em sala de aula. Os últimos três métodos foram implementados apenas para casos com Hamiltoniano separável ($H(p, q) = T(p) + V(q)$). Uma generalização pode ser necessária.

3 Parte 1 - Massa-mola linear - discussões sobre estabilidade e análise do erro dos métodos numéricos

Nessa primeira etapa, considere um problema do tipo massa-mola linear. Responda as seguintes questões.

3.1 Questão 1

Considere os métodos $1-2$ e $6-7$ acima aplicados para um problema do tipo massa-mola linear. Considere que o sistema discreto é escrito através da seguinte equação linear:

$$\begin{bmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix}$$

Determine a matriz A para cada um desses métodos numéricos. O que significam seus auto-valores e o que eles dizem sobre a estabilidade dos métodos? Como eles variam em relação ao passo de integração Δt.

3.2 Questão 2

Resuma em uma tabela as propriedades de erro local e ordem dos métodos numéricos $1-8$.

4 Parte 2 - Problema não-linear com Hamiltoniano separável

Escolha um problema não-linear separável de seu interesse. Algumas sugestões:

- Problema de Kepler ou problema de corpo central
- Problema de N-corpos
- Pêndulo

Apresente as equações do movimento para o problema escolhido utilizando as formulações de Euler-Lagrange e Hamiltoniana. Aplique os diferentes métodos de integração estudados acima e discuta como os seguintes aspectos:

- Estabilidade dos métodos;
- Influência do passo de integração Δt;
- Preservação do Hamiltoniano;
- Preservação de outras integrais primeiras, se houver;

- Custo computacional.

Procure fazer simulações de longa duração (muitos ciclos de oscilação), analisando como os métodos se comportam em longos períodos de tempo.

5 Parte 3 - Extensão dos métodos apresentados

Proponha alterações dos métodos particionados (Euler-A, Euler-B e Stõrmer-Verlet). Em particular, proponha e escreva uma função que inverta a ordem de ingração do Stõrmer-Verlet. Além disso, discuta como os métodos podem ser estendidos para o caso em que o Hamiltoniano não é separável.

6 Parte 4 - Problema não-linear com Hamiltoniano não-separável

Sugestão: Considere o problema da viga utilizando elemetos concentrados vista em sala de aula.

1. Apresente a dedução das equações para o caso com duas barras. Mostre as equações obtidas através do método de Euler-Lagrange, e as equações obtidas através da formulação Hamiltoniana.

2. Proponha uma maneira de automatizar a obtenção das equações dessa viga para a utilização de N barras rígidas (ao invés de duas). Verifique até quantos graus de liberdade o SymPy é capaz de obter as equações.

3. Proponha uma maneira de ajustar os parâmetros (de rigidez e massa), para que a viga de N barras se comporte como uma viga de Euler-Bernoulli em flexão.

4. Linearize as equações dinâmicas e obtenha os auto-valores e auto-vetores associados. O que significam?

5. Proponha uma maneira de incluir uma força na ponta da estrutura, perpendicular ao último elemento.

6. Calcule o equilíbrio para diferentes forças aplicadas. Linearize as equações nesses pontos de equilíbrio, compare os auto-valores com aqueles obtidos para a viga não-defletida.

7. Simule o problema da viga utilizando os métodos visto no curso e também as extensões discutidas anteriormente. Discuta os resultados obtidos, em termos de estabilidade, custo computacional, preservação do Hamiltoniano, etc.