AB-721: Desempenho de Aeronaves

Flávio Ribeiro

Departamento de Mecânica do Voo
Divisão de Engenharia Aeroespacial
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

2019

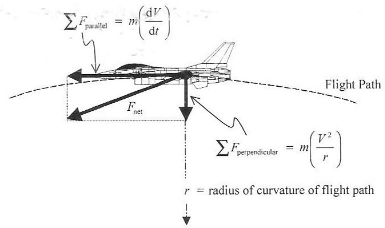
PARTE IV
Cruzeiro Permanente: autonomia e alcance

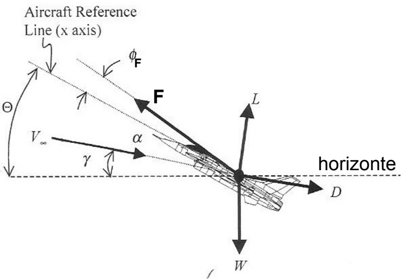
Equações do movimento
Ponto-massa

Equações do movimento longitudinal (ponto-massa):

$$\sum \text{Forças}_{\text{paralelas}} = m\frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,t} = F\cos\left(\alpha+\phi_F\right) - D - W\sin\gamma$$

$$\sum \text{Forças}_{\text{perpendic.}} = m\frac{V^2}{r} = mV\dot{\gamma} = -F\sin\left(\alpha+\phi_F\right) - L + W\cos\gamma$$





Equações do movimento
Cruzeiro permanente

- **Permanente** $\Rightarrow$ sem acelerações $\Rightarrow$ $\dot{V} = \dot{\gamma} = 0$
- Simplificação:
  $(\alpha + \alpha_F) < 5°$, e portanto $\cos(\alpha + \alpha_F) \approx 1$ e $\sin(\alpha + \alpha_F) \approx 0$
- Altitude constante: $\gamma = 0$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\gamma = 0 \\ \cos\gamma = 1 \end{cases}$$

As equações do movimento simplificam-se:

$$0 = F - D$$
$$0 = L - mg$$

Equações do movimento

Cruzeiro permanente

Da primeira equação temos a equação do arrasto:

$$F = D$$

Da segunda equação temos a equação da sustentação:

$$L = mg$$

Da equação da sustentação:

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = mg$$

$$C_L = \frac{2mg}{\rho S}\frac{1}{V^2} \quad \text{ou} \quad V = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_L}}$$

Desempenho pontual em cruzeiro

Tração requerida

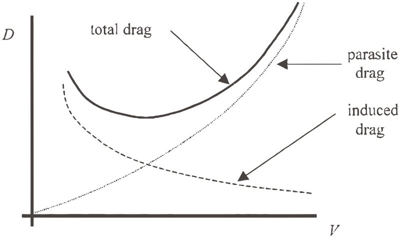
Para uma polar de arrasto parabólica $C_D = C_{D_0} + k\,{C_L}^2$:

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D_0} + k\,{C_L}^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_0} + \frac{1}{2}\rho V^2 S k\,{C_L}^2$$

Substituindo a expressão de C_L em função da velocidade:

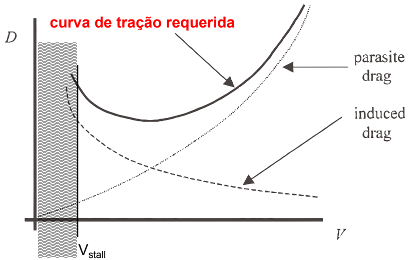
$$D = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\rho S C_{D_0}\right) V^2}_{\text{arrasto parasita}} + \underbrace{\left(\frac{2k(mg)^2}{\rho S}\right)\frac{1}{V^2}}_{\text{arrasto induzido}}$$



Desempenho pontual em cruzeiro
Tração requerida

Da equação do arrasto:

$$\begin{aligned} F &= D \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\rho S C_{D_0}\right) V^2}_{\text{arrasto parasita}} \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{2k(mg)^2}{\rho S}\right) \frac{1}{V^2}}_{\text{arrasto induzido}} \end{aligned}$$



Esta é a chamada
TRAÇÃO REQUERIDA

Desempenho pontual em cruzeiro
Tração requerida

$$F_r = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\rho S C_{D_0}\right) V^2}_{\text{arrasto parasita}} + \underbrace{\left(\frac{2k(mg)^2}{\rho S}\right)\frac{1}{V^2}}_{\text{arrasto induzido}}$$

A tração requerida é portanto função:

- velocidade
- altitude (ρ)
- peso da aeronave (mg)
- configuração (polar de arrasto)

Desempenho pontual em cruzeiro
Tração requerida - Tração requerida mínima

Tração requerida mínima = arrasto mínimo
Colocando o arrasto em função de C_L:

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \left(\frac{1}{2}\rho V^2 S\right) C_{D(C_L)}$$

Substituindo a equação da sustentação:

$$D = \left(\frac{mg}{C_L}\right) C_{D(C_L)} = mg\frac{C_{D(C_L)}}{C_L}$$

Desempenho pontual em cruzeiro

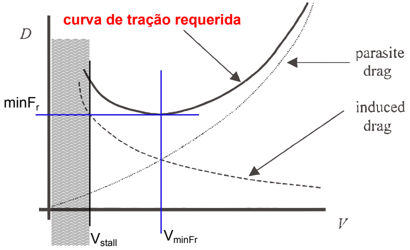
Tração requerida - Tração requerida mínima

Condição de mínimo:

$$\boxed{\left(C_L\right)_{\substack{\text{min.}\\\text{tração}}} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}}}$$

Conclusão:

A condição de **tração requerida mínima** é a condição de **máxima eficiência aerodinâmica**!



Desempenho pontual em cruzeiro

Modelo propulsivo e tração disponível

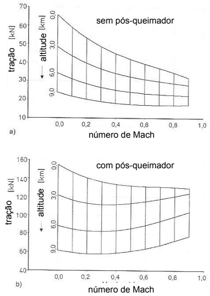
Dependências:

- tipo de sistema propulsor
- manete de combustível
- altitude e Mach (ou velocidade e densidade)

De forma geral, em relação à condição de operação (V_i, ρ_i):

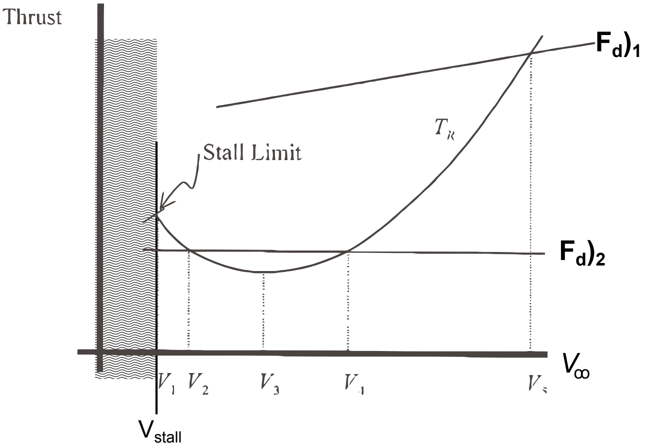
$$F_d = \pi F_{\max,i} \left(\frac{V}{V_i}\right)^{n_V} \left(\frac{\rho}{\rho_i}\right)^{n_\rho}$$

(retirado da wikpedia.de)



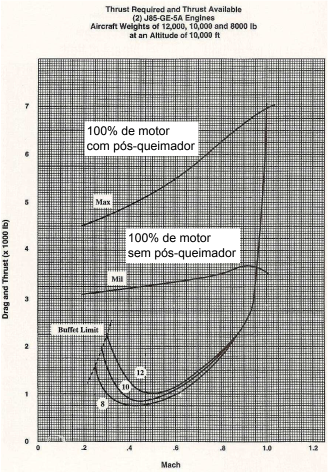
(retirado e modificado de Bockhaus et al., **Flugregelung**)

Desempenho pontual em cruzeiro
Tração requerida versus tração disponível



Desempenho pontual em cruzeiro

Tração requerida versus tração disponível



Desempenho integral em cruzeiro

A seguir o desempenho em cruzeiro será discutido quanto a:

- autonomia
- alcance

Lembre-se que a aeronave carrega uma quantidade determinada de combustível! A **quantidade de combustível queimada** por **tempo** de operação e por **distância** percorrida é a chave para os cálculos acima.

Desempenho integral em cruzeiro

Equação da autonomia de Breguet

A autonomia (*Endurance*) de uma aeronave é simplesmente o seu tempo de voo:

$$E = \int_{t_i}^{t_f} dt$$

A uma determinada quantidade de combustível está associada uma autonomia. Por isso é interessante mudar a variável de integração do tempo t para o peso da aeronave W.

Consideremos que a variação no peso da aeronave por unidade de tempo é igual à taxa de fluxo de combustível ($\dot{W}_f$), ou seja:

$$\dot{W}_f = \frac{-d\ W}{dt}$$

Desempenho integral em cruzeiro

Equação da autonomia de Breguet

Reescrevendo a equação anterior para dt:

$$dt = \frac{-d\ W}{\dot{W}_f}$$

Então a autonomia da aeronave pode ser reescrita por:

$$E = \int_{t_i}^{tf} dt = \int_{W_i}^{W_f} \frac{-d\ W}{\dot{W}_f} = \int_{W_f}^{W_i} \frac{d\ W}{\dot{W}_f}$$

Costuma-se trabalhar com consumo específico de combustível, em inglês *thrust-specific fuel consumption* ($TSFC$):

$$\boxed{TSFC = \frac{\dot{W}_f}{F}}$$

Desempenho integral em cruzeiro
Equação da autonomia de Breguet

Substituindo na equação da autonomia:

$$E = \int_{W_f}^{W_i} \frac{d\ W}{\dot{W}_f} = \int_{W_f}^{W_i} \frac{d\ W}{(TSFC)F}$$

Mas, no cruzeiro sabemos que:

$$\begin{cases} L = W \\ D = F \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{W}{F} = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F} = \frac{C_L}{C_D}\frac{1}{W}$$

Então, substituindo:

$$E = \int_{W_f}^{W_i} \frac{d\ W}{(TSFC)F} = \int_{W_f}^{W_i} \frac{1}{(TSFC)} \frac{C_L}{C_D} \frac{1}{W} d\ W$$

$$\boxed{E = \int_{W_f}^{W_i} \frac{1}{(TSFC)} \frac{C_L}{C_D} \frac{1}{W} d\ W}$$

Desempenho integral em cruzeiro
Equação da autonomia de Breguet

Considerando:

- altitude fixa e manete fixa $\Rightarrow TSFC$ constante;
- ângulo de ataque fixo $\Rightarrow \frac{C_L}{C_D}$ constante.

Então a equação da autonomia é simplificada para:

$$E = \int_{W_f}^{W_i} \frac{1}{(TSFC)} \frac{C_L}{C_D} \frac{1}{W} d\, W = \frac{1}{(TSFC)} \frac{C_L}{C_D} \int_{W_f}^{W_i} \frac{1}{W} d\, W$$

Integrando:

$$\boxed{E = \frac{1}{(TSFC)} \frac{C_L}{C_D} \ln \frac{W_i}{W_f}}$$

Portanto, para uma dada quantidade de combustível, a autonomia de uma aeronave é maximizada minimizando $TSFC$ (voando a altas altitudes) e maximizando a razão C_L/C_D.

Desempenho integral em cruzeiro

Equação do alcance de Breguet

$$R = \int_{S_0}^{S_f} dS = \int_{t_i}^{tf} V dt$$

A uma determinada quantidade de combustível está associado um alcance. Por isso, assim como foi feito no caso da autonomia, é interessante mudar a variável de integração do tempo t para o peso da aeronave W. Para isso substitui-se $\dot{W}_f = \frac{-d\ W}{dt}$:

$$R = \int_{t_i}^{tf} V dt = \int_{W_f}^{W_i} V \frac{d\ W}{\dot{W}_f}$$

Desempenho integral em cruzeiro

Equação do alcance de Breguet

Aplicando a definição de consumo específico de combustível ($TSFC = \frac{\dot{W}_f}{F}$):

$$R = \int_{W_f}^{W_i} V \frac{d\ W}{\dot{W}_f} = \int_{W_f}^{W_i} V \frac{d\ W}{(TSFC)F}$$

Substituindo-se a relação $\frac{1}{F} = \frac{C_L}{C_D}\frac{1}{W}$ proveniente das equações do cruzeiro ($L = W$ e $D = F$):

$$R = \int_{W_f}^{W_i} V \frac{d\ W}{(TSFC)F} = \int_{W_f}^{W_i} V \frac{1}{(TSFC)} \frac{C_L}{C_D} \frac{1}{W} d\ W$$

$$\boxed{R = \int_{W_f}^{W_i} V \frac{1}{(TSFC)} \frac{C_L}{C_D} \frac{1}{W} d\ W}$$

Desempenho integral em cruzeiro

Equação do alcance de Breguet

A equação da sustentação também fornece a velocidade V em função de W, C_L e ρ:

$$W = L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}}$$

Substituindo na equação do alcance:

$$R = \int_{W_f}^{W_i} \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} \frac{1}{(TSFC)} \frac{C_L}{C_D} \frac{1}{W} d\ W$$

$$\boxed{R = \int_{W_f}^{W_i} \sqrt{\frac{2}{\rho S}} \frac{1}{(TSFC)} \frac{{C_L}^{1/2}}{C_D} \frac{1}{\sqrt{W}} d\ W}$$

Desempenho integral em cruzeiro

Equação do alcance de Breguet

Considerando:

- altitude fixa $\Rightarrow \rho$ é constante;
- C_L/C_D constante;
- $TSFC$ constante.

A equação do alcance é simplificada para:

$$R = \sqrt{\frac{2}{\rho S}} \frac{1}{(TSFC)} \frac{{C_L}^{1/2}}{C_D} \int_{W_f}^{W_i} \frac{1}{\sqrt{W}} d\ W$$

Integrando:

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{2}{\rho S}} \frac{2}{(TSFC)} \frac{{C_L}^{1/2}}{C_D} \left(\sqrt{W_i} - \sqrt{W_f}\right)}$$

Portanto, o alcance do cruzeiro com altitude constante é maximizado voando a altas altitudes (menor densidade ρ e $TSFC$) e maximizando a razão ${C_L}^{1/2}/C_D$.

Desempenho integral em cruzeiro

Equação do alcance de Breguet

Retomando a equação:

$$R = \int_{W_f}^{W_i} V \frac{1}{(TSFC)} \frac{C_L}{C_D} \frac{1}{W} d\ W$$

Considerando:

- Velocidade constante;
- C_L/C_D constante;
- $TSFC$ constante.

A equação do alcance é simplificada para:

$$R = V \frac{1}{(TSFC)} \frac{C_L}{C_D} \int_{W_f}^{W_i} \frac{1}{W} d\ W$$

Desempenho integral em cruzeiro

Equação do alcance de Breguet

Integrando e substituindo $V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}}$ temos:

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}} \frac{1}{(TSFC)} \frac{{C_L}^{1/2}}{C_D} \ln \frac{W_i}{W_f}}$$

Portanto, o alcance do cruzeiro com velocidade constante é maximizado voando a altas altitudes (menor densidade ρ e $TSFC$) e maximizando a razão ${C_L}^{1/2}/C_D$, que são as mesmas conclusões do cruzeiro com altitude constante.

Note que, para manter a velocidade e C_L constantes, a razão (W/ρ) deve ser mantida constante. Então à medida que W diminui a densidade deve diminuir, ou seja a altitude deve aumentar. Por isso o cruzeiro com velocidade constante também é conhecido por "*cruise climb*". No entanto, ao longo do cruzeiro, à medida que a altitude aumenta, o $TSFC$ diminui, desrespeitando as considerações iniciais.

Exercícios

Exercício: Seja um T-38 com 12.000 lb voando a 10.000 ft. Usando a "Performance Chart", encontre:

1) $(L/D)_{\text{max}}$
2) O arrasto induzido em $(L/D)_{\text{max}}$
3) O número de Mach de $(L/D)_{\text{max}}$
4) O número de Mach de "stall"
5) O máximo número de Mach para "mil power"

Exercícios

Solução:
1) $(L/D)_{\text{max}}$ occorre no ponto de mínimo da curva de arrasto:

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\text{max}} = \frac{W}{D_{\text{min}}} = \frac{12.000}{1000} = 12$$

2) O arrato induzido e o arrasto parasita são iguais em $(L/D)_{\text{max}}$. Portanto:

$$D_{\text{induzido}} = \frac{1}{2} D_{\text{min}} = \frac{1}{2}(1000) = 500 \text{ lb}$$

3) Da "Chart" temos que o número de Mach em $(L/D)_{\text{max}}$ é 0.5
4) O número de Mach de "stall"("buffet") é 0.305
5) O máximo número de Mach para "mil power" é 0.96

Exercícios

Exercício: Um T-37 a 20.000 ft tem uma polar de arrasto $C_D = 0,02 + 0,057{C_L}^2$. A aeronave tem um peso inicial de 6000 lb, sendo 500 lb de combustível. Se o $TSFC$ a essa altitude é de $0,836/$h, encontre a máxima autonomia.

Exercícios

Exercício: Um T-37 a 20.000 ft tem uma polar de arrasto $C_D = 0,02 + 0,057{C_L}^2$. A aeronave tem um peso inicial de 6000 lb, sendo 500 lb de combustível. Se o $TSFC$ a essa altitude é de $0,836/$h, encontre a máxima autonomia.

Solução:
para maximizar a autonomia, a aeronave deve voar com $(L/D)_{\text{max}}$. Para uma polar parabólica simétrica:

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\text{max}} = \left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{\text{max}} = \frac{\sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}}}{C_{D_0} + k\frac{C_{D_0}}{k}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{kC_{D_0}}} = \frac{1}{2\sqrt{0,057(0,02)}} = 14,8$$

$$E = \frac{1}{TSFC}\left(\frac{C_L}{C_D}\right)\ln\frac{W_i}{W_f} = \frac{1}{0,836}(14,8)\ln\frac{6000}{5500} = 1,54 \text{ h}$$

Exercícios

Exercício: Para um T-37, com $C_D = 0,02 + 0,057{C_L}^2$ e $S = 184$ ft^2, determine o máximo alcance a 20.000 ft ($TSFC = 0,836/\text{h}$) para cruzeiro com altitude constante e cruzeiro tipo "cruise climb"

Exercícios

Exercício: Para um T-37, com $C_D = 0,02 + 0,057{C_L}^2$ e $S = 184$ ft^2, determine o máximo alcance a 20.000 ft ($TSFC = 0,836/\text{h}$) para cruzeiro com altitude constante e cruzeiro tipo "cruise climb"

Solução:

para maximizar o alcance, a aeronave deve voar com $({C_L}^{1/2}/C_D)_{\text{max}}$. Para uma polar parabólica simétrica:

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{3k}} = \sqrt{\frac{0,02}{3(0,057)}} = 0,342$$

$$C_D = 0,02 + 0,057(0,342)^2 = 0,0267$$

$$\left(\frac{{C_L}^{1/2}}{C_D}\right)_{\text{max}} = \frac{(0,342)^{1/2}}{0,0267} = 21,9$$

$$TSFC = 0,836/\text{h} = 0,836\left(\frac{\text{h}}{3600\ \text{s}}\right) = 0,000232/\text{s}$$

Exercícios

para o cruzeiro com altitude constante:

$$R = \sqrt{\frac{2}{\rho S}} \left(\frac{2}{TSFC}\right) \left(\frac{{C_L}^{1/2}}{C_D}\right) \left(\sqrt{W_i} - \sqrt{W_f}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{(0,001267)(184)}} \left(\frac{2}{0,000232}\right) (21,9) \left(\sqrt{6000} - \sqrt{5500}\right) =$$

$$= 1.823.529 \text{ ft} = 345 \text{ miles}$$

para o "cruise climb":

$$R = \sqrt{\frac{2}{\rho S}} \left(\frac{1}{TSFC}\right) \left(\frac{{C_L}^{1/2}}{C_D}\right) \ln \frac{W_i}{W_f} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{(0,001267)(184)}} \left(\frac{1}{0,000232}\right) (21,9) \ln \left(\frac{6000}{5500}\right) =$$

$$= 1.863.483,6 \text{ ft} = 352,9 \text{ miles}$$