Movimento Longitudinal da Aeronave

AB-722

Flávio Luiz Cardoso Ribeiro

http://flavioluiz.github.io

flaviocr@ita.br

Departamento de Mecânica do Voo
Divisão de Engenharia Aeronáutica e Aeroespacial
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

2018

Movimento longitudinal x Latero-direcional

Movimento completo da aeronave:

- 6 graus de liberdade (3 velocidades e 3 rotações)

6 equações do movimento acopladas

Aeronaves simétricas:

- Movimento longitudinal (simétrico) não causa contribuições às forças aerodinâmicas latero-direcionais (anti-simétrico).
- Logo: Podemos estudar o movimento longitudinal separadamente:
- 3 graus de liberdade (2 velocidades e 1 rotação)

3 equações do movimento

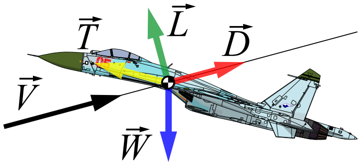
Forças e momentos que atuam na aeronave

No movimento longitudinal:

- Velocidade está no plano de simetria;
- Forças externas agindo no plano de simetria;
- Trajetória no plano vertical.

Forças e momentos atuantes:

- Aerodinâmicas;
- Propulsivas;
- Gravitacional.



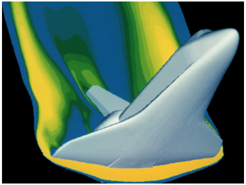
Etapas para a obtenção das equações do movimento longitudinal

- Descrição dos modelos Aerodinâmico e Propulsivo para a determinação das forças (sustentação, arrasto e tração) e momento de arfagem;
- Descrição do modelo atmosférico para cálculo da massa específica do ar;
- Definição dos sistemas de coordenadas de interesse;
- Aplicação da segunda lei de Newton para corpos rígidos;
- Acrescentar equações cinemáticas para determinação da posição da aeronave.

Modelo Aerodinâmico

Pode ser obtido através de:

- Métodos empíricos: Datcom, ESDU, Roskam
- Métodos analíticos: linha sustentadora, teorias aproximadas
- CFD
- Testes em túnel de vento
- Ensaios em vôo



Modelo Aerodinâmico

A força de sustentação (L), arrasto (D) e o momento aerodinâmico de arfagem (m) são dados por:

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \qquad D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D \qquad m = \frac{1}{2}\rho V^2 S c C_m$$

Os coeficientes aerodinâmicos C_L, C_D e C_m são funções não lineares de:

- Ângulo de ataque
- Velocidade angular de rotação de arfagem (q)
- Número de Reynolds
- Número de Mach
- Deflexão das superfícies de comando
- Efeitos não-estacionários

Modelo Aerodinâmico

Podemos admitir as seguintes hipóteses simplificadoras:

- Coeficientes C_L e C_m são funções lineares do ângulo de ataque, deflexão do profundor, taxa de arfagem e taxa de variação do ângulo de ataque;
- Coeficiente de arrasto C_D é função apenas do coeficiente de sustentação, através de polar de arrasto quadrática.

Os coeficientes ficam:

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha + C_{L_{\delta p}}\delta p + C_{L_q}\left(q\frac{c_{ref}}{V_{ref}}\right)$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_{\delta p}}\delta p + C_{m_q}\left(q\frac{c_{ref}}{V_{ref}}\right) + C_{m_{\dot\alpha}}\left(\dot\alpha\frac{c_{ref}}{V_{ref}}\right)$$

$$C_D = C_{D_0} + k_1 C_L + k_2 {C_L}^2$$

Modelo Propulsivo

A tração varia com a massa específica do ar ρ, velocidade aerodinâmica V e posição da manete π.
O seguinte modelo aproximado é bastante empregado:

$$T = \pi T_{max,i} \left(\frac{\rho}{\rho_i}\right)^{n_\rho} \left(\frac{V}{V_i}\right)^{n_V}$$

onde $T_{max,i}$ é a tração máxima obtida nas condições ρ_i, V_i.

- Pistão: n_V = -1
- Turbofan ou jato subsônico: n_V = 0
- Jato supersônico: n_V = 1

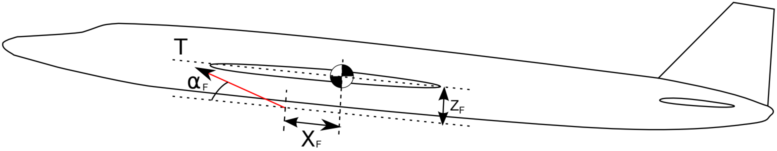
Valores típicos para n_ρ:

- Altitude até 11000 metros: 0.7 < n_ρ <0.8
- Altitude maior que 11000 metros: n_ρ = 1

Modelo Propulsivo

Caso o motor não esteja alinhado com o centro de gravidade da aeronave, aparecerá um momento propulsivo:

$$m_F = z_F cos(\alpha_F)T + x_F sin(\alpha_F)T$$



Modelo Atmosférico

Forças aerodinâmicas e propulsivas dependem da massa específica do ar. Utilizamos o modelo ISA (International Standard Atmosphere):

- Temperatura varia linearmente entre as camadas a partir de perfis conhecidos

$$T = T_n + A_n(H - H_n)$$

- Equação dos gases perfeitos é utilizada para determinar a massa específica e pressão atmosférica em função da temperatura

$$\left(\frac{\rho}{\rho_n}\right) = \left(\frac{T}{T_n}\right)^{-\left(1+\frac{g_0}{A_n R}\right)} \qquad \left(\frac{P}{P_n}\right) = \left(\frac{T}{T_n}\right)^{-\left(\frac{g_0}{A_n R}\right)}$$

Sistemas de Referência

Sistema de Referência do Corpo

- X_B - Aponta em direção ao nariz da aeronave
- Z_B - No plano de simetria; aponta do dorso para o ventre da aeronave;
- Y_B - Completa o sistema destrógiro (aponta para a asa direita).

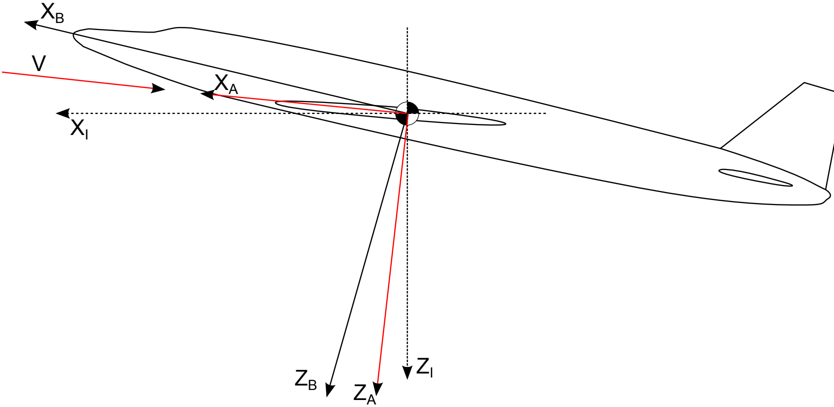
Sistema de Referência Aerodinâmico

- X_A - Alinhado ao vetor velocidade aerodinâmica;
- Z_A - No plano de simetria, perpendicular à X_A;
- Y_A - Completa o sistema destrógiro (aponta para a asa direita).

Sistema de Referência Inercial

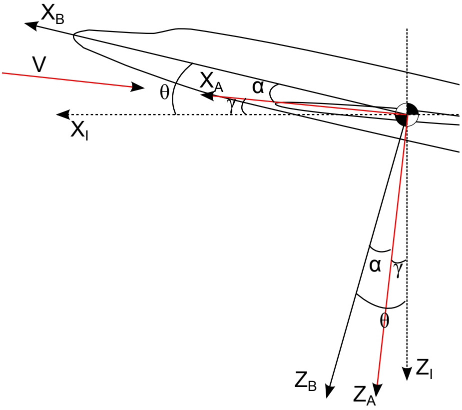
- X_I - Aponta para o norte;
- Z_I - Aponta para o centro da Terra;
- Y_I - Completa o sistema destrógiro.

Sistemas de Referência



Ângulos entre os sistemas de referência

α: Ângulo de ataque
γ: Ângulo de trajetória
θ: Ângulo de arfagem



Revisão

2ª Lei de Newton para translação:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

- $\vec{p}$ é a quantidade de movimento linear ($m\vec{v}$);
- A derivada temporal deve ser feita em relação ao referencial inercial.

Pode-se demonstrar que: $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} + \vec{\omega}_{X,I} \times \vec{x}$

- $\vec{x}$ é um vetor escrito num sistema de coordenadas X qualquer;
- o sistema de coordenadas X rotaciona em relação ao inercial com velocidade angular $\vec{\omega}_{X,I}$;
- $\dfrac{d\vec{x}}{dt}$ é a derivada temporal de $\vec{x}$ em relacão ao referencial inercial, mas escrito no sistema de coordenadas de X.

Revisão

2ª Lei de Newton para rotação:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \sum \vec{M}_{ext}$$

- $\vec{l}$ é a quantidade de movimento angular;
- A derivada temporal deve ser feita em relação ao referencial inercial.

Para corpos rígidos:

$$\vec{l} = [I]\vec{\omega}$$

$$\vec{l} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} .\vec{\omega}$$

Revisão

Matriz de inércia:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) dm \qquad I_{yy} = \int_V (x^2 + z^2) dm \qquad I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xy} = \int_V xy dm \qquad I_{xz} = \int_V xz dm \qquad I_{yz} = \int_V yz dm$$

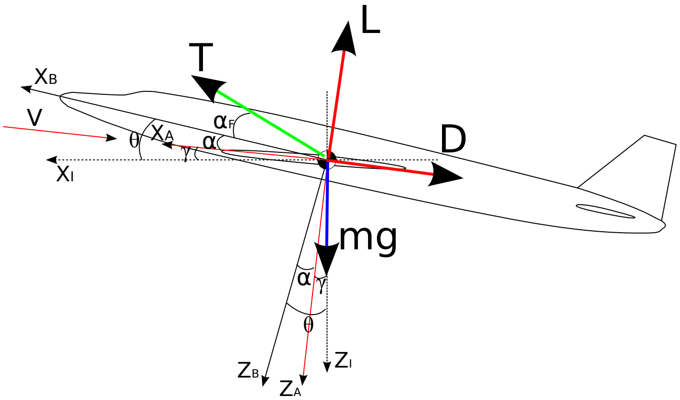
- A matriz varia de acordo com o sistema de coordenadas escolhido;
- Para um corpo rígido, devemos escolher um sistema de coordenados fixo ao corpo, caso contrário a matriz irá variar ao longo do tempo;
- Muitas aeronaves exibem simetria de distribuição de massa em relação ao plano x-z: $I_{xy} = I_{yz} = 0$.

Dedução - Hipóteses

- A Terra é considerada um sistema inercial plano;
- A trajetória se situa no eixo vertical: apenas translação nos eixos X_I e Z_I, rotações no eixo Y;
- Vento inicialmente desconsiderado;
- Aeronave simétrica (em relação ao plano X_B-Z_B).

Dedução

Dinâmica de translação



Dedução

Dinâmica de translação Deduziremos no sistema de coordenadas aerodinâmico:

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} mV \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

Vimos que:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} + \vec{\omega}_{X,I} \times \vec{x}$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} m\dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix}_A \times \begin{bmatrix} mV \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} m\dot{V} \\ 0 \\ -mV\dot{\gamma} \end{bmatrix}_A = \sum \vec{F}_{ext}$$

Dedução

$$\begin{bmatrix} m\dot{V} \\ 0 \\ -mV\dot{\gamma} \end{bmatrix}_A = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{Aerodinamicas} + \vec{F}_{Propulsiva} + \vec{F}_{Gravitacional}$$

Onde:

$$\vec{F}_{Aerodinamicas} = \begin{bmatrix} -D \\ 0 \\ -L \end{bmatrix}_A$$

$$\vec{F}_{Propulsivas} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{Propulsivo} = \begin{bmatrix} Tcos(\alpha + \alpha_F) \\ 0 \\ -Tsin(\alpha + \alpha_F) \end{bmatrix}_A$$

$$\vec{F}_{Gravitacional} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}_I = \begin{bmatrix} -mgsin(\gamma) \\ 0 \\ mgcos(\gamma) \end{bmatrix}_A$$

Dedução

$$\begin{bmatrix} m\dot{V} \\ 0 \\ -mV\dot{\gamma} \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} -D \\ 0 \\ -L \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} Tcos(\alpha + \alpha_F) \\ 0 \\ -Tsin(\alpha + \alpha_F) \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} -mgsin(\gamma) \\ 0 \\ mgcos(\gamma) \end{bmatrix}_A$$

Logo:

$$m\dot{V} = -D + Tcos(\alpha + \alpha_F) - mgsin(\gamma)$$
$$-mV\dot{\gamma} = -L - Tsin(\alpha + \alpha_F) + mgcos(\gamma)$$

Dedução

Dinâmica de rotação

Deduziremos no sistema de coordenadas do corpo:

$$\vec{l} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{yy}\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

Vimos que:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \sum \vec{M}_{ext}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} + \vec{\omega}_{X,I} \times \vec{x}$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_{yy}\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_B \times \begin{bmatrix} 0 \\ I_{yy}\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{yy}\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_B = \sum \vec{M}_{ext}$$

Dedução

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_{yy}\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_B = \sum \vec{M}_{ext} = \vec{M}_{aerodinamico} + \vec{M}_{propulsivo}$$

$$M_{aerodinamico} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_A \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

$$M_{propulsivo} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_F \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

Mas $\dot{\theta} = q$

$$I_{yy}\dot{q} = m_A + m_F$$

Dedução

Equações do movimento longitudinal:

$$\dot{V} = \frac{Tcos(\alpha + \alpha_F) - D}{m} - gsin(\gamma)$$
$$\dot{\gamma} = \frac{L + Tsin(\alpha + \alpha_F)}{mV} - \frac{gcos(\gamma)}{V}$$
$$\dot{q} = \frac{1}{I_{yy}}(m_A + m_F)$$

Podemos acrescentar as seguintes relações cinemáticas:

$$\dot{x} = Vcos\gamma$$
$$\dot{H} = Vsin\gamma$$

E a seguinte relação geométrica: $\alpha = \theta - \gamma$

$$\dot{\alpha} = q - \dot{\gamma}$$

Dedução

Estados:

$$X = \begin{bmatrix} V \\ \gamma \\ q \\ \alpha \\ H \\ x \end{bmatrix}$$

Controles:

$$U = \begin{bmatrix} \delta p \\ \pi \end{bmatrix}$$

Equilíbrio

Procurando manter velocidade (V_{eq}) e altitude (H_{eq}) constantes. Adionalmente, nessa situação: $\gamma = 0$.
Temos três equações:

$$\dot{V} = \frac{Tcos(\alpha + \alpha_F) - D}{m} - gsin(\gamma) = 0$$
$$\dot{\gamma} = \frac{L + Tsin(\alpha + \alpha_F)}{mV} - \frac{gcos(\gamma)}{V} = 0$$
$$\dot{q} = \frac{1}{I_{yy}}(m_A + m_F) = 0$$

...e três incógnitas: α_{eq}, δ_{eq} e π_{eq}.
Podemos, por exemplo, resolver numericamente no MATLAB através do *fsolve*.

Simulação

Temos um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\dot{X} = f(X, U)$$

E condições iniciais X = X(0).

- Podemos integrar essas equações numericamente (Euler, Runge-Kutta, etc.).
- No MATLAB, podemos utilizar alguma rotina de integração: ODE45, ODE15, ODE23, etc.