Linearização e Estabilidade Dinâmica

AB-722

Flávio Luiz Cardoso Ribeiro

http://flavioluiz.github.io

flaviocr@ita.br

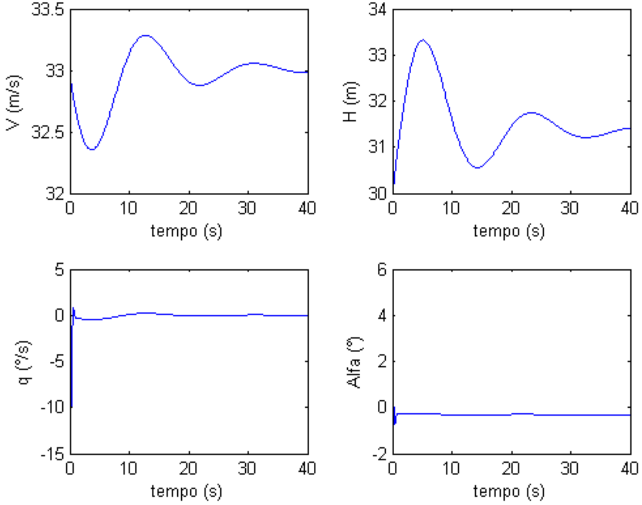
Departamento de Mecânica do Voo
Divisão de Engenharia Aeronáutica e Aeroespacial
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

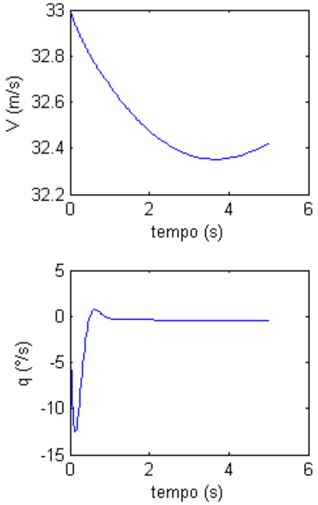
2018

Objetivos da aula

- Linearização do modelo dinâmico;
- Análise de estabilidade dinâmica - revisão de resposta autônoma de sistemas lineares invariantes no tempo;
- Separação em modos de curto período e fugoidal;
- Linearização analítica para o modo de período curto.

Exemplo de simulação para uma perturbação no ângulo de ataque em relação ao equilíbrio:





33
32.8
32.6
32.4
32.2
V (m/s)
0
2
4
6
tempo (s)
34
33
32
31
30
H (m)
0
2
4
6
tempo (s)
5
0
-5
-10
-15
q (°/s)
0
2
4
6
tempo (s)
6
4
2
0
-2
Alfa (°)
0
2
4
6
tempo (s)

Linearização

Obtivemos equações na forma:

$$\dot{X} = f(X, U)$$

Onde f é uma função não linear dos estados (X) e controles (U).
Desejamos linearizar o modelo para:

- Permitir a aplicação de técnicas de controle linear;
- Efetuar um estudo de estabilidade e da qualidade de vôo da aeronave.

Linearizando teremos:

$$\dot{X} = AX + BU$$

Linearização

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{q} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{H} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = f(X,U) = \begin{bmatrix} f_V \\ f_\gamma \\ f_q \\ f_\alpha \\ f_H \\ f_x \end{bmatrix}$$

Linearizando por exemplo a primeira linha (em torno do equilíbrio), fica:

$$\dot{V} = f_V(X,U) = f_V(V,\gamma,q,\alpha,H,\pi,\delta p)$$

$$\dot{V} = f_{V\,eq} + \left.\frac{\partial f_V}{\partial V}\right|_{eq}(V - V_{eq}) + \left.\frac{\partial f_V}{\partial \gamma}\right|_{eq}(\gamma - \gamma_{eq}) + \ldots$$

E de maneira análoga para os demais estados:

$$\dot{\gamma} = f_{\gamma\,eq} + \left.\frac{\partial f_\gamma}{\partial V}\right|_{eq}(V - V_{eq}) + \left.\frac{\partial f_\gamma}{\partial \gamma}\right|_{eq}(\gamma - \gamma_{eq}) + \ldots$$

...

Linearização

Incluindo todas as equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{q} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{H} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_V}{\partial V} & \frac{\partial f_V}{\partial \gamma} & \frac{\partial f_V}{\partial q} & \frac{\partial f_V}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_V}{\partial H} \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial V} & \frac{\partial f_\gamma}{\partial \gamma} & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q} & \frac{\partial f_\gamma}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_\gamma}{\partial H} \\ \frac{\partial f_q}{\partial V} & \frac{\partial f_q}{\partial \gamma} & \frac{\partial f_q}{\partial q} & \frac{\partial f_q}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_q}{\partial H} \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial V} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial \gamma} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial q} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial H} \\ \frac{\partial f_H}{\partial V} & \frac{\partial f_H}{\partial \gamma} & \frac{\partial f_H}{\partial q} & \frac{\partial f_H}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_H}{\partial H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V - V_{eq} \\ \gamma - \gamma_{eq} \\ q - q_{eq} \\ \alpha - \alpha_{eq} \\ H - H_{eq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_V}{\partial \pi} & \frac{\partial f_V}{\partial \delta p} \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial \pi} & \frac{\partial f_\gamma}{\partial \delta p} \\ \frac{\partial f_q}{\partial \pi} & \frac{\partial f_q}{\partial \delta p} \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial \pi} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial \delta p} \\ \frac{\partial f_H}{\partial \pi} & \frac{\partial f_H}{\partial \delta p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi - \pi_{eq} \\ \delta p - \delta p_{eq} \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares Invariantes no tempo

Seja um sistema homogêneo:

$$\dot{X} = AX$$

A solução no tempo para esse tipo de sistema (resposta autônoma) pode ser obtida através de:

$$X(t) = e^{At} X(0)$$

Onde e^{At} é um exponencial matricial, e pode ser obtido a partir de:
$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + ...$

Sistemas Lineares Invariantes no tempo

- λ é um autovalor de A se $det(\lambda I - A) = 0$, o que é verdade se existe um auto-vetor v não nulo:

$$(\lambda I - A)v = 0$$
$$Av = \lambda v$$

Caso os auto-vetores sejam linearmente independentes:

$$A \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Seja:

$T = \begin{bmatrix} v_1 & ... & v_n \end{bmatrix}$

e

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Temos que:

$AT = T\Lambda$

$A = T\Lambda T^{-1}$

Pode-se demonstrar que:

$$X(t) = e^{At}X(0) = Te^{\Lambda t}T^{-1}X(0) = \sum v_i e^{\lambda_i t}\beta_i$$

$$X(t) = \sum v_i e^{\lambda_i t} \beta_i$$

- A solução é uma combinação linear dos **modos do sistema**: $v_i e^{\lambda_i t}$.
- $e^{\lambda_i t}$ - está relacionado com a natureza da resposta no tempo;
- v_i - está relacionado com a contribuição de cada um dos estados ao modo;
- β_i - está relacionado com a excitação do modo a partir da condição inicial.

Podemos notar que:

- $Re(\lambda_i) < 0$ - Dinamicamente estável;
- $Re(\lambda_i) > 0$ - Dinamicamente instável.

E ainda:

- $Im(\lambda_i) = 0$ - Não oscilatório;
- $Im(\lambda_i)$ não nulo - Oscilatório.

Em aeronaves convencionais, os cinco autovalores associados ao movimento longitudinal são:

- Um par complexo conjugado mais próximo da origem;
- Um par complexo conjugado mais afastado da origem;
- Um autovalor sobre o eixo real.

No caso do VANT (estados: V, γ, q, H, α):

$$A = \begin{bmatrix} -0.1868 & -9.8066 & -0.0029 & 0.0000 & -0.4129 \\ 0.0180 & 0 & 0.0301 & -0.0000 & 4.3936 \\ -0.0000 & 0 & -4.9566 & 0.0000 & -50.5066 \\ 0 & 33.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0180 & 0 & 0.9699 & 0.0000 & -4.3936 \end{bmatrix}$$

Autovalores:

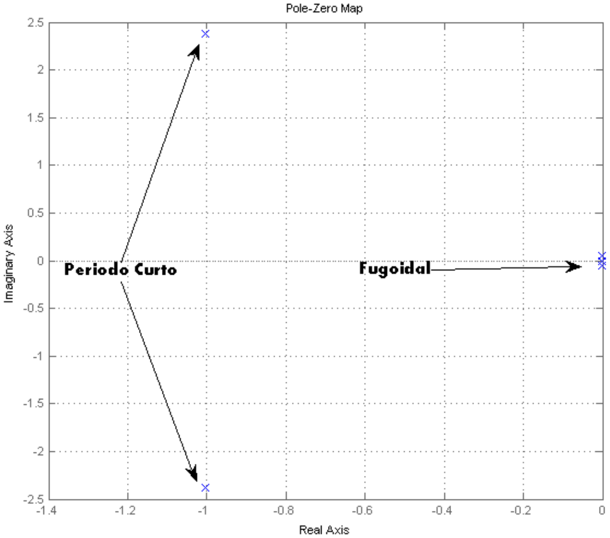
- $-8.26e-004$
- $-9.05e-002 \pm 3.44e-001i$, $\xi = 0.254$, $\omega_n = 0.356$ Longo período
- $-4.68e+000 + 7.00e+000i$, $\xi = 0.556$, $\omega_n = 8.42$ Curto período

No caso do A310:

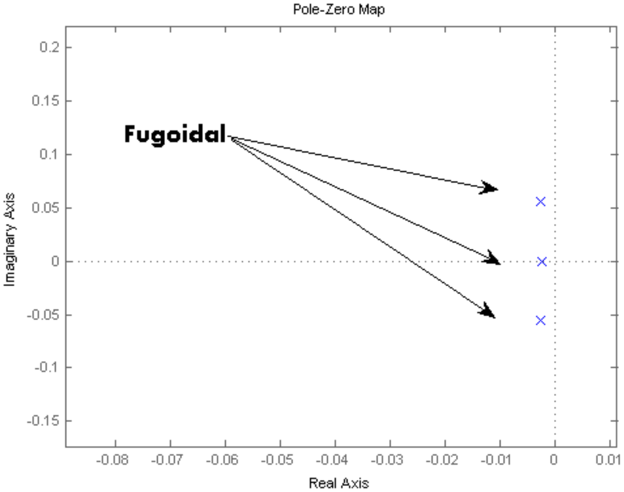
$$A = \begin{bmatrix} -0.0086 & -9.8066 & 0.0109 & -0.0000 & -5.8648 \\ 0.0003 & 0 & -0.0021 & -0.0000 & 1.1095 \\ -0.0002 & 0 & -0.8975 & -0.0000 & -5.6394 \\ 0 & 250.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0003 & 0 & 1.0021 & 0.0000 & -1.1095 \end{bmatrix}$$

- $-2.35e-003$
- $-2.71e-003 \pm 5.58e-002i$, $\xi = 0.0484$, $\omega_n = .0559$. Longo período
- $-1.00e+000 \pm 2.37e+000i$, $\xi = 0.389$, $\omega_n = 2.58$. Curto período

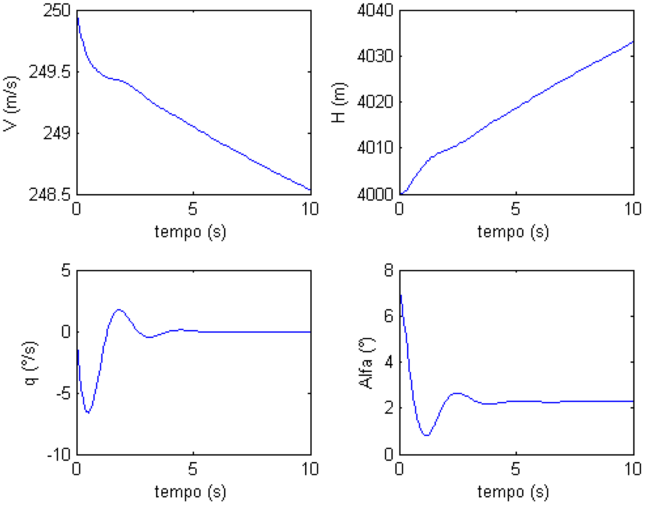
Mapa de autovalores da matriz A, para a dinâmica linearizada do A310:



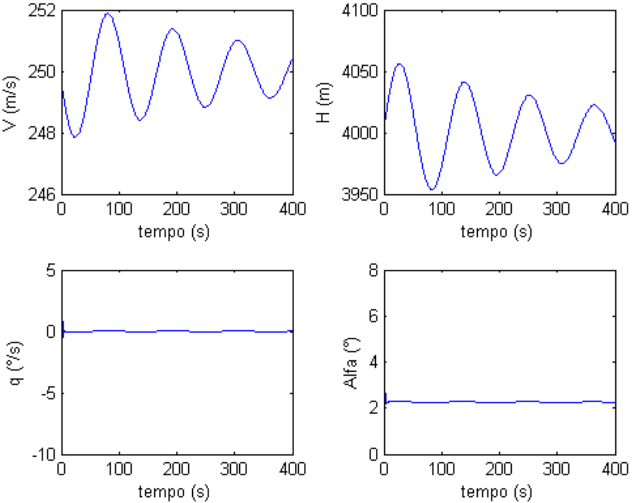
Mapa de autovalores da matriz A, para a dinâmica linearizada do A310:



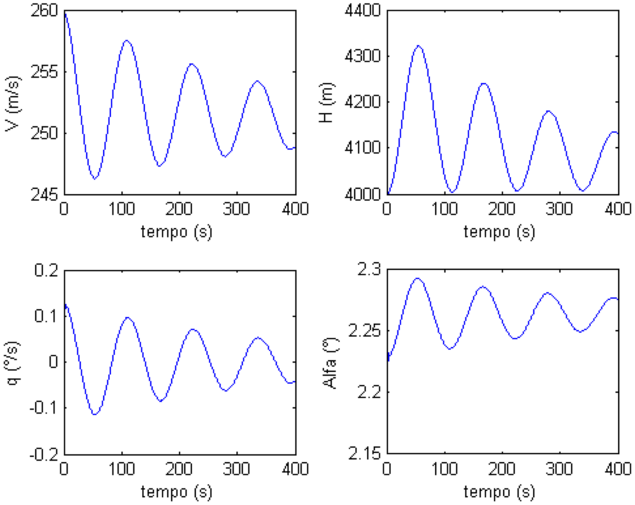
Simulação para o A310, com perturbação inicial no ângulo de ataque:



Simulação para o A310, com perturbação inicial no ângulo de ataque:



Simulação para o A310, com perturbação inicial na velocidade:



Sistemas dinâmicos de segunda ordem

Podemos aproximar cada um dos modos como sistemas de segunda ordem, obtendo resultados como por exemplo:

- Período das oscilações: $T = \dfrac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$
- Tempo de acomodação (5%): $t_s = 4.6/(\xi\omega_n)$ (fonte: Kuo)

No caso do A310. Para o período curto: Para o período longo:

- T = 2.64 s.
- t_s = 4.58 s.

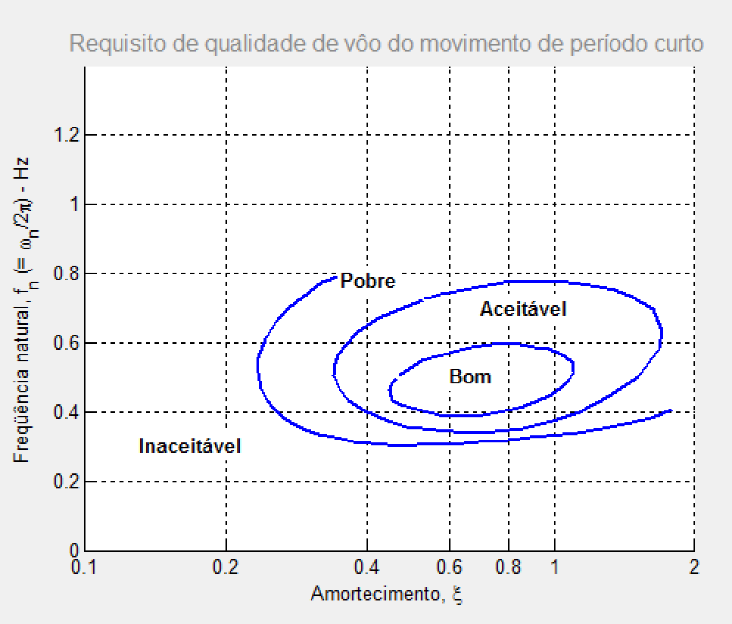
Para o período longo:

- T = 112 s.
- t_s = 1700 s.

Qualidades de Vôo

- Como saber se as características de estabilidade da aeronave são desejáveis para o piloto?
- Escala de notas dadas pelos pilotos: Cooper-Harper -> Apenas em etapas avançadas de projeto;
- Correlações entre as avaliações dos pilotos e as características da aeronave;

Norma MIL 8785C:



Linearização analítica - Período curto

Adotando as seguintes hipóteses:

- Velocidade aproximadamente constante: $\dot{V} = 0$;
- Momento propulsivo nulo: $m_F = 0$;
- Pouca variação de altura (não influencia cálculos aerodinâmicos e propulsivos);
- Efeitos de aerodinâmica não-estacionária desprezados: $\dot{\alpha} = 0$;
- γ pequeno: $cos(\gamma) = 1$.

Linearização analítica - Período curto

Equações do movimento:

$$\dot{V} = \frac{Tcos(\alpha + \alpha_F) - D}{m} - gsin(\gamma)$$
$$\dot{\gamma} = \frac{L + Tsin(\alpha + \alpha_F)}{mV} - \frac{gcos(\gamma)}{V}$$
$$\dot{q} = \frac{1}{I_{yy}}(m_A + m_F)$$
$$\dot{x} = Vcos\gamma$$
$$\dot{H} = Vsin\gamma$$
$$\dot{\alpha} = q - \dot{\gamma}$$

Para o estudo do período curto, nos interessa apenas os estados: q e α (seguindo as hipóteses dos slides anteriores, esses estados são independentes dos demais).

Linearização analítica - Período curto

$$\dot{q} = \frac{1}{I_{yy}}(m_A + m_F)$$
$$\dot{\alpha} = q - \dot{\gamma} = q - \frac{L + Tsin(\alpha + \alpha_F)}{mV} - \frac{gcos(\gamma)}{V}$$

No equilíbrio:

$$\dot{q} = 0 = \frac{m_{A_{eq}}}{I_{yy}}$$
$$\dot{\alpha} = 0 = 0 - \dot{\gamma} = 0 - \frac{L_{eq} + Tsin(\alpha_{eq} + \alpha_F)}{mV_{eq}} - \frac{gcos(\gamma_{eq})}{V_{eq}}$$

Linearização analítica - Período curto

Após a perturbação, para as condições consideradas na hipótese ($V = V_{eq}$, $\gamma = 0$):

$$\dot{q} = \frac{m_A}{I_{yy}}$$
$$\dot{\alpha} = q - \frac{L + T sin(\alpha + \alpha_F)}{mV_{eq}} - \frac{g}{V_{eq}}$$

Subtraindo das equações acima as equações da condição de equilíbrio:

$$\dot{q} - 0 = \frac{m_A - m_{Aeq}}{I_{yy}}$$
$$\dot{\alpha} - 0 = (q - 0) - \frac{(L - L_{eq}) + T(sin(\alpha + \alpha_F) - sin(\alpha_{eq} + \alpha_F))}{mV_{eq}}$$

Linearização analítica - Período curto

Do modelo aerodinâmico linearizado:

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha + C_{L_{\delta p}}\delta p + C_{L_q}\left(q\frac{c_{ref}}{V_{ref}}\right)$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_{\delta p}}\delta p + C_{m_q}\left(q\frac{c_{ref}}{V_{ref}}\right) + C_{m_{\dot\alpha}}\left(\dot\alpha\frac{c_{ref}}{V_{ref}}\right)$$

Logo:

$$L - L_{eq} = 0.5\rho V^2 S\left[C_{L_\alpha}(\alpha - \alpha_{eq}) + C_{L_{\delta p}}(\delta p - \delta p_{eq}) + C_{L_q}\left((q-0)\frac{c_{ref}}{V_{ref}}\right)\right]$$

$$M - M_{eq} =$$
$$0.5\rho V^2 Sc\left[C_{m_\alpha}(\alpha - \alpha_{eq}) + C_{m_{\delta p}}(\delta p - \delta p_{eq}) + C_{m_q}\left((q-0)\frac{c_{ref}}{V_{ref}}\right)\right]$$

Linearização analítica - Período curto

Definindo: $\bar{\alpha} = \alpha - \alpha_{eq}$ e $\bar{\delta p} = \delta p - \delta p_{eq}$

Podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} q \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} + B\bar{\delta p}$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2I_{yy}}\rho V S c C_{m_q} c/V & \frac{1}{2I_{yy}}\rho V^2 S c C_{m_\alpha} \\ 1 - \frac{1}{2mV}\rho V^2 S C_{L_q} c/V & -\frac{T}{mV} - \frac{1}{2mV}\rho V^2 S C_{L_\alpha} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2I_{yy}}\rho V^2 S c C_{m_{\delta p}} \\ -\frac{1}{2mV}\rho V^2 S C_{L_{\delta p}} \end{bmatrix}$$

Linearização analítica - Período curto

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{m_q}{I_{yy}} & \dfrac{m_\alpha}{I_{yy}} \\ 1 - \dfrac{L_q}{mV} & -\dfrac{T}{mV} - \dfrac{L_\alpha}{mV} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{m_{\delta p}}{I_{yy}} \\ -\dfrac{L_{\delta p}}{mV} \end{bmatrix}$$

onde

$m_q = 0.5\rho V^2 Sc(C_{m_q} c/V)$
$m_\alpha = 0.5\rho V^2 Sc(C_{m_\alpha})$
$L_q = 0.5\rho V^2 S(C_{L_q} c/V)$
$L_\alpha = 0.5\rho V^2 S(C_{L_\alpha})$
$m_{\delta p} = 0.5\rho V^2 Sc(C_{m_{\delta p}})$
$L_{\delta p} = 0.5\rho V^2 S(C_{L_{\delta p}})$

Linearização analítica - Período curto

Pode-se obter analiticamente o polinômio característico de A.

$det(A - \lambda I) =$

$$\lambda^2 + \left(-\frac{m_q}{I_{yy}} + \frac{L_\alpha + T}{mV} \right) \lambda + \left(-\frac{m_\alpha}{I_{yy}} - \frac{m_q}{I_{yy} V m} (T + L_\alpha) + \frac{L_q m_\alpha}{I_{yy} m V} \right)$$

E sabemos que a equação característica de um sistema de segunda ordem com amortecimento ξ, e frequência natural ω_n:

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + {\omega_n}^2$$

Pode-se encontrar a frequência, amortecimento, etc como funções das características da aeronave e da condição de equilíbrio:

$$\omega_n = \sqrt{-\frac{m_\alpha}{I_{yy}} - \frac{m_q}{I_{yy} m V} (T + L_\alpha) + \frac{L_q m_\alpha}{I_{yy} m V}}$$

$$\xi = \frac{\left(-\frac{m_q}{I_{yy}} + \frac{L_\alpha + T}{mV} \right)}{2\omega_n}$$

Linearização analítica - Período curto

No caso do VANT, obtivemos numericamente:

$$A = \begin{bmatrix} -0.1868 & -9.8066 & -0.0029 & 0.0000 & -0.4129 \\ 0.0180 & 0 & 0.0301 & -0.0000 & 4.3936 \\ 0.0275 & 0 & \mathbf{-6.4330} & -0.0000 & \mathbf{-43.8187} \\ 0 & 33.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0180 & 0 & \mathbf{0.9699} & 0.0000 & \mathbf{-4.3936} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2.1660 & -0.0385 \\ -0.0003 & 0.3937 \\ -0.0005 & \mathbf{-82.7781} \\ 0 & 0 \\ 0.0003 & \mathbf{-0.3937} \end{bmatrix}$$

$$\omega_n = 8.42,\ \xi = 0.643.$$

E analiticamente para o período curto:

$$A = \begin{bmatrix} -4.9566 & -50.5066 \\ 0.9699 & -4.3936 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -83.3773 \\ -0.3937 \end{bmatrix}$$

$$\omega_n = 8.41,\ \xi = 0.556.$$

Linearização analítica - Período curto

- Os resultados da linearização analítica e da numérica foram próximos;
- A diferença acontece exclusivamente por termos desprezado a contribuição de $\dot{\alpha}$ na linearização analítica;

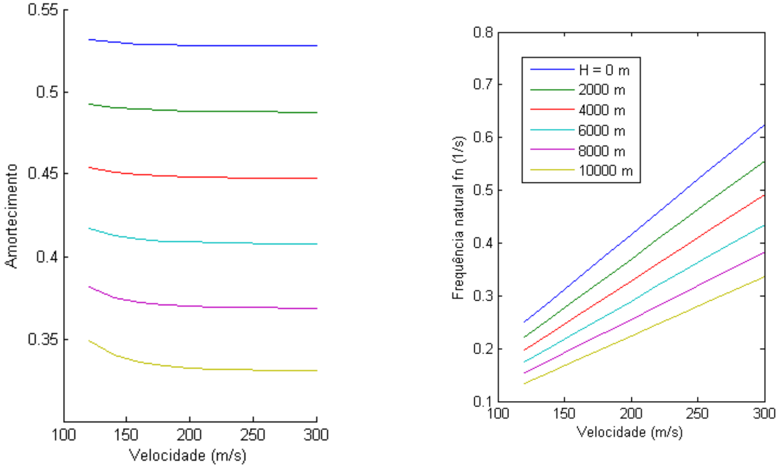
Note ainda que o termo: $1 - \dfrac{L_q}{mV}$ vale aproximadamente 1. Podemos desprezar a influência da taxa de arfagem na sustentação sem grande prejuízo.

Linearização analítica - Período curto

Valem, aproximadamente, as seguintes relações:
$\omega_n \propto V$
$\omega_n \propto \sqrt(\rho)$
$\xi \propto \sqrt(\rho)$
$\xi \approx$ independe de V

Linearização analítica - Período curto

Variação do período de oscilação e amortecimento do período curto com a velocidade e altitude para o modelo de A310:



Linearização analítica - Período curto

Resumo:

- A aeronave reage à perturbações no ângulo de ataque e na taxa de arfagem, ou a comando do profundor na forma de um movimento oscilatório;
- Em geral esse movimento é de alta frequência e bastante amortecido;
- O movimento leva o nome de período curto;
- Esse movimento está relacionado ao sentimento intuitivo do piloto de que o controle do ângulo de ataque se dá pelo profundor.

Linearização analítica - Período longo

Hipóteses:

- Desprezando a dinâmica do ângulo de ataque;
- Ângulo de ataque é função direta da posição do profundor: $C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_{\delta p}}\delta p = 0$
- Coeficientes aerodinâmicos permanecem constantes: $C_L = C_{L_{eq}}$ e $C_D = C_{D_{eq}}$.

Linearização analítica - Período longo

Das equações do movimento:

$$\dot{V} = \frac{Tcos(\alpha + \alpha_F) - D}{m} - gsin(\gamma)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{L + Tsin(\alpha + \alpha_F)}{mV} - \frac{gcos(\gamma)}{V}$$

$$\dot{H} = V sin\gamma$$

Note que $\dot{V}$, $\dot{\gamma}$ e $\dot{H}$ são funções não-lineares de V, H, γ, α e π:

$$\dot{V} = f_1(V, H, \gamma, \alpha, \pi)$$

$$\dot{\gamma} = f_2(V, H, \gamma, \alpha, \pi)$$

$$\dot{H} = f_3(V, H, \gamma, \alpha, \pi)$$

Linearização analítica - Período longo

Expandindo em série de Taylor:

$$\dot{V} = f_{1,E} + \frac{\partial f_{1,E}}{\partial V}\bar{V} + \frac{\partial f_{1,E}}{\partial H}\bar{H} + \frac{\partial f_{1,E}}{\partial \gamma}\bar{\gamma} + \frac{\partial f_{1,E}}{\partial \alpha}\bar{\alpha} + \frac{\partial f_{1,E}}{\partial \pi}\bar{\pi}$$

$$\dot{\gamma} = f_{2,E} + \frac{\partial f_{2,E}}{\partial V}\bar{V} + \frac{\partial f_{2,E}}{\partial H}\bar{H} + \frac{\partial f_{2,E}}{\partial \gamma}\bar{\gamma} + \frac{\partial f_{2,E}}{\partial \alpha}\bar{\alpha} + \frac{\partial f_{2,E}}{\partial \pi}\bar{\pi}$$

$$\dot{H} = f_{3,E} + \frac{\partial f_{3,E}}{\partial V}\bar{V} + \frac{\partial f_{3,E}}{\partial H}\bar{H} + \frac{\partial f_{3,E}}{\partial \gamma}\bar{\gamma} + \frac{\partial f_{3,E}}{\partial \alpha}\bar{\alpha} + \frac{\partial f_{3,E}}{\partial \pi}\bar{\pi}$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{V}} \\ \dot{\bar{H}} \\ \dot{\bar{\gamma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_V & U_H & U_\gamma \\ 0 & 0 & V_E \\ \Gamma_V & \Gamma_H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V} \\ \bar{H} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_\alpha & U_F \\ 0 & 0 \\ \Gamma_\alpha & \Gamma_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\pi} \end{bmatrix}$$

Linearização analítica - Período longo

Onde:

$$U_V = (n_v - 2)\frac{g}{V_E E_E'} \qquad U_H = (n_\rho - 1)\rho_H \frac{g}{V_E E_E'}$$

$$U_\gamma = -\frac{g}{V_E} \qquad \Gamma_V = \frac{2g}{V_E} + (n_v - 2)\frac{g}{V_E E_E'} tg(\alpha_E + \alpha_F)$$

$$\Gamma_H = \left[\frac{g}{V_E} + (n_\rho - 1)\frac{g}{V_E E_E'} tg(\alpha_E + \alpha_F)\right]\rho_H$$

$$U_\alpha = -\left[\frac{g}{V_E E_E'} tg(\alpha_E + \alpha_F) + \frac{D_\alpha}{V_E}\right] \qquad U_F = \frac{g}{V_E E_E'}$$

$$\Gamma_\alpha = \frac{g}{V_E E_E'} + \frac{L_\alpha}{V_E} \qquad \Gamma_F = \frac{g}{V_E E_E'} tg(\alpha_E + \alpha_F)$$

$$L_\alpha = \frac{1}{2}\rho_E V_E^2 \frac{S}{m} C_{L\alpha} \qquad D_\alpha = \frac{1}{2}\rho_E V_E^2 \frac{S}{m} C_{D\alpha}$$

Note que o movimento fugoidal depende de:

- Condição de equilíbrio: V_E, α_E, etc.;
- Atmosfera: ρ_E, ρ_H;
- Características e dimensões da aeronave: S, m, C_{L_α}, etc;
- Características do sistema propulsivo: n_V, n_ρ.

Linearização analítica - Período longo

Para a matriz A do período fugoidal, temos três autovalores: um real, que conduz à um movimento aperiódico bastante lento; um par complexo, também pouco amortecido:

$$s_1$$
$$s_2 = \omega_n \xi + \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$
$$s_3 = \omega_n \xi - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Linearização analítica - Período longo

Pode-se aproximar:

$$s_1 \approx \frac{g\rho_H(2n_\rho - n_V)}{V_E E_E'(\frac{2g}{{V_E}^2} - \rho_H)}$$

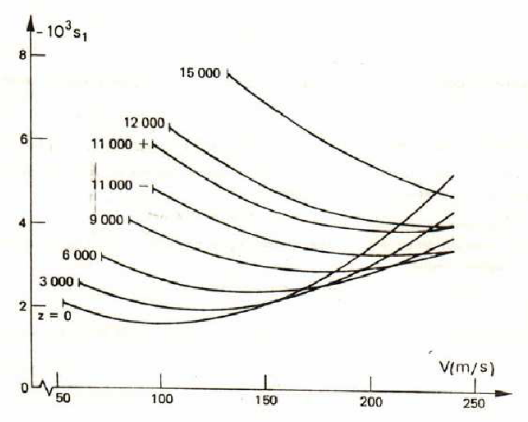
Note a influência do modelo propulsivo: $2n_\rho - n_V$! Quanto maior esse termo, mais amortecido é o movimento aperiódico.

Motor	$2n_\rho$-n_v
Foguete	0
Jato supersônico	1
Jato subsônico	2
Turbofan	2 a 3
Pistão	3

Linearização analítica - Período longo

$$s_1 \approx \frac{g\rho_H(2n_\rho - n_V)}{V_E {E_E}'(\frac{2g}{{V_E}^2} - \rho_H)}$$

No Mirage:



Linearização analítica - Período longo

O movimento periódico também pode ser aproximado:

$$\omega_n \xi \approx \frac{g}{2V_E E'_E}\left(-\frac{2n_\rho - n_V}{2g/V_E^2 - \rho_H}\rho_H + n_V - 2\right)$$
$$\omega_n \approx \sqrt{g\frac{2g}{V_E^2 - \rho_H}}$$

Sobre a influência do sistema propulsivo, nota-se que:

- Pouco influencia a frequência de oscilação;
- Influencia o amortecimento (quanto maior $2n_\rho - n_V$ mais amortecido).

Nota-se também que a frequência de oscilação diminui com a velocidade.
O amortecimento é inversamente proporcional à eficiência aerodinâmica.