Sistemas de Controle de Aeronaves

AB-722

Flávio Luiz Cardoso Ribeiro

http://flavioluiz.github.io

flaviocr@ita.br

Departamento de Mecânica do Voo
Divisão de Engenharia Aeronáutica e Aeroespacial
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

2018

Sistemas de Controle de Aeronaves

- **SAS** (Stability Augmentation System): Melhorar características da resposta autônoma;
- **CAS** (Control Augmentation System): Melhoras as características de controle, rastreando um comando do piloto (ex.: rastreio de fator de carga);
- **PA** (Piloto Automático): Aliviar a carga de trabalho do piloto, cumprindo uma determinada missão (altitude constante, velocidade constante, etc.).

Metodologias de Projeto de Controle

Controle Clássico:

- Métodos baseados na resposta em frequência;
- Lugar Geométrico das Raizes;
- Funções de transferência;
- Transformadas de Laplace.

Controle Moderno:

- Espaço de estados;
- Ajuste de ganhos:
- Alocação de Pólos;
- Índices de desempenho (LQR).

Projeto de sistemas de controle

O seguinte roteiro é sugerido para o projeto de sistemas de controle de vôo:

1. Conhecer a planta (aeronaves, atuadores);
2. Definir o objetivo do sistema (quais as especificações de desempenho?);
3. Escolha da arquitetura do sistema:
   - Sensores (sistema anemométrico, plataforma inercial, ...);
   - Quais parâmetros serão medidos (ângulo de ataque, taxa de arfagem, ...);
   - Quais comandos serão realimentados (profundor, manete);
   - Escolha de um compensador (proporcional, PI, PID, avanço/atraso de fase).
4. Cálculo dos ganhos e parâmetros dos compensadores (aplicação das técnicas de controle clássico/moderno)
5. Validação do projeto (teste com modelo não-linear)

Controle clássico

Função de transferência

Vimos que é possível representar o movimento da aeronave próximo do equilíbrio através de um sistema linear:

$$\dot{X} = AX + BU$$

As saídas (medições) da aeronave, também podem ser obtidas através de uma relação linear com os estados:

$$Y = CX$$

Podemos obter a função de transferência entre a entradas e a saída através da seguinte relação:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B$$

Controle clássico

Função de transferência

Vimos que o movimento longitudinal pode ser separado em dois movimentos com pouco acoplamento. Dessa forma, podemos obter as matrizes A_{PC} e B_{PC}, relacionadas com o movimento de período curto da aeronave. Os estados relacionados com esse movimento são o ângulo de ataque (α) e taxa de arfagem (q).

$$\dot{X}_{PC} = A_{PC}X_{PC} + B_{PC}\delta p$$

Os autovalores da matriz A_{PC} estão diretamente relacionados com a qualidade de vôo da aeronave. Baixas frequências e pequenos amortecimentos são indesejados! Supondo o seguinte vetor de estados: $X_{PC} = [q; \alpha]$. Caso a saída seja a taxa de arfagem, podemos obtê-la através da seguinte expressão:

$$q = [1, 0]X_{PC}$$

Logo, a função de transferência que relaciona a entrada δp com a saída q fica:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = [1, 0](sI - A_{PC})^{-1} B_{PC}$$

Os pólos da função de transferência são exatamente os autovalores da matriz A!

No caso do A310 (para condição de vôo 220 m/s, H = 4000 m):

$$A_{PC} = \begin{bmatrix} -0.9271 & -4.1409 \\ 1.0018 & -0.9766 \end{bmatrix}$$
$$B_{PC} = \begin{bmatrix} -5.0975 \\ -0.0849 \end{bmatrix}$$

E, para o sistema cuja saída é a taxa de arfagem q, a função de transferência fica:

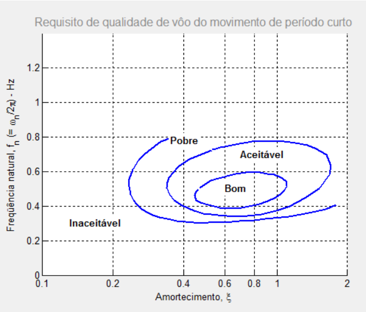
$$G(s) = -\frac{5.097s + 4.627}{s^2 + 1.904s + 5.054}$$

O sistema tem os seguintes pólos imaginários $p = -0.942 \pm 2.04i$ e o seguinte zero $z = -0.908$. A frequência natural é $\omega_n = 2.25$ e o amortecimento é $\xi = 0.42$.

Controle clássico

Critério de qualidade de vôo

Vimos que um critério bastante utilizado para o período curto é o seguinte:



- Uma boa especificação para a frequência natural é de $\approx 3rad/s$ e para o amortecimento é de ≈ 0.6 $(p = -1.8 \pm 2.4i)$.
- O que fazer se a aeronave projetada não satisfazer essas especificações?

O que fazer se a aeronave projetada não satisfazer as especificações de amortecimento e frequência natural em uma ou várias condições de vôo?

- Mudar o projeto da aeronave? (tamanho da empenagem, posição do CG, etc.)
- Implementação de um sistema de controle por realimentação.

Quais medidas poderiam ser realimentadas e que influenciariam a resposta de período curto?

Controle clássico

Ajuste de ganhos através de Lugar das Raízes

- Consiste em um método gráfico para determinar a localização dos pólos de malha fechada a partir do conhecimento dos pólos e zeros de malha aberta à medida que o valor de um parâmetro (ganho, por exemplo), varia de zero à infinito;
- Observando-se o gráfico do lugar das raízes de um sistema SISO, em malha fechada, pode-se fazer o ajuste da posição dos pólos dominantes pela variação do ganho;
- Caso não seja possível o ajuste da posição dos pólos apenas pela variação do ganho, pode haver necessidade de adição de zeros ou pólos através de compensadores.

Controle clássico

Ajuste de ganhos através de Lugar das Raízes

Seja a função de transferência de um sistema SISO:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

A função de transferência do sistema realimentado (negativamente) com um ganho K fica:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + KG(s)}$$

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s) + KN(s)}$$

Os pólos do sistema realimentado passam a ser as raízes do polinômio:
$p(s) = D(s) + KN(s)$
O método do lugar geométrico das raízes permite traçar como a posição dos pólos varia com o ganho K.

Controle clássico

Ajuste de ganhos através de Lugar das Raízes

O procedimento de Evans para construir o LGR consiste de uma coleção de regras para determinar se um ponto de teste no plano complexo é um pólo de malha-fechada do sistema para algum valor de K:

Regra 1: Os pólos de malha aberta são todos pontos do LGR correspondentes ao ganho K = 0;

Regra 2: O número de ramos do LGR é exatamente igual a quantidade de raízes do denominador da função de transferencia em malha-fechada;

Regra 3: Para $K \geq 0$, qualquer ponto do eixo real que ficar a esquerda de um numero impar de singularidades (polos ou zeros) localizadas tambem no eixo real é um ponto do LGR;

Regra 4: O LGR é simétrico em relação ao eixo real;

Regra 5: Se G(s) tem n polos e m zeros finitos ($m \leq n$) então exatamente m ramos terminam, quando $k \to \infty$, em zeros finitos. Os ramos remanescentes (n-m) tendem ao infinito para $k \to \infty$.

Controle clássico

Ajuste de ganhos através de Lugar das Raízes

Regra 6: Se G(s) tem n polos e m zeros finitos entao os (n - m) ramos tendem assitoticamente para uma reta que intercepta o eixo real no ponto σ_0 que forma um ângulo γ com o mesmo eixo real, onde:

$$\sigma_0 = \frac{\sum Re(polos) - \sum Re(zeros)}{n - m}$$

$$\gamma = \frac{180(2q+1)}{n-m} \text{ , q = 0,1,2,3 ...}$$

Regra 7: O cálculo dos pontos de entrada e de saída do Lugar Geométrico das Raízes no eixo real do plano s é realizado com base na equação:

$$\frac{dG(s)}{ds} = 0$$

Regra 8: Nos casos em que o LGR do sistema sob análise apresenta raízes sobre o eixo imaginário, o valor do ganho K necessário para que ocorra tal situação poderá ser determinado empregando-se o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz.

Seja um polinômio:

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} ... + a_1\lambda + a_0:$$

Podemos verificar se todas as raízes do polinômio possuem parte real negativa através do critério de Routh:

- Todos os coeficientes do polinômio devem ter o mesmo sinal;
- Todos os coeficientes do polinômio devem existir;
- Os coeficientes da primeira coluna da matriz de Routh devem ter o mesmo sinal.

Controle clássico

Critério de Estabilidade de Routh

Matriz de Routh:

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \\
\vdots & & & & \\
s^0 & q & & &
\end{array}
$$

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

Controle Moderno

Introdução

- O método do lugar das raízes é bastante adequado para sistemas SISO. Quando tratamos de sistemas MIMO, com multiplas realimentações, o processo de ajuste de ganhos ainda é possível, mas há necessidade de múltiplos fechamentos de malha e reprojeto de forma iterativa;
- Uma opção para os sistemas MIMO são os chamados projetos de controle moderno;
- O projeto é baseado diretamente no sistema de espaço de estados e, não mais, no domínio da frequência (funções de transferência);
- Todos os ganhos podem ser obtidos simultaneamente, ou seja, todas as realimentações são feitas ao mesmo tempo;
- O controle moderno trata de métodos mais rápidos e diretos.

Seja o sistema:

$$\dot{X} = AX + Bu$$
$$Y = CX$$

Realimentando negativamente as saídas ponderadas por um ganho K:

$$u = u_c - KY$$

Temos o sistema:

$$\dot{X} = (A - BKC)X + Bu_c$$

Os pólos do sistema agora são os autovalores da matriz $(A - BKC)$.

No caso de realimentação de estados a matriz C é igual à identidade.

- Realimentando os estados de um sistema linear, todos os pólos podem ser realocados;
- Admitiremos que todas as variáveis de estado de um sistema são mensuráveis e estão disponíveis para a realimentação. Caso contrário, um observador de estados deve ser utilizado para estimar variáveis não mensuráveis;

Com realimentação de estados podemos alocar os pólos arbitrariamente?

Controle Moderno

Alocação de pólos

Com realimentação de estados podemos alocar os pólos arbitrariamente?
Seja o sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

- Demonstra-se que a condição necessária e suficiente para a alocação arbitrária de pólos, através da matriz K, é que o sistema seja de estado completamente controlável.
- O sistema é dito de estado completamente controlável se é possível levá-lo de um dado estado até um estado final qualquer em um intervalo finito de tempo através de um controle não limitado.
- Condição necessária e suficiente para que um sistema seja de estado completamente controlável é que o posto da matriz de controlabilidade (M) seja igual à ordem do sistema (n).

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Seja, por exemplo, um sistema de ordem 3. A matriz de ganhos da realimentação de estados toma forma:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

Desejamos que os pólos de malha fechada sejam p_1,p_2 e p_3. Devemos, então, impor:

$$det(sI - A + BK) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)$$

- O sistema acima (linear) pode ser resolvido algebricamente ou numericamente;
- Se o sistema não for controlável, a equação acima não terá solução.

No MATLAB, podemos utilizar as funções *acker* e *place* para alocação de pólos.

Controle Moderno

Ajuste de ganhos - LQR - Realimentação de Estados

Considere o sistema dado por:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Na forma linearizada:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Suponhamos, agora, realimentação de estado através da matriz K:

$$u = -Kx$$

Procuramos a matriz K ótima que minimiza o índice quadrático de desempenho J, dado por:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

onde Q e R são matrizes semidefinidas positivas.

Controle Moderno

Ajuste de ganhos - LQR - Realimentação de Estados

Fechando a malha: $u = -Kx$
O sistema realimentado fica:

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

Podemos reescrever o índice de desempenho:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt \\ &= \int_0^\infty x^T (Q + K^T R K) x dt \end{aligned}$$

Suponhamos que exista P, semidefinida positiva, tal que:

$$x^T (Q + K^T R K) x = -\frac{d}{dt}(x^T P x)$$

Então:

$$\begin{aligned} x^T(Q + K^T RK)x &= -\frac{d}{dt}(x^T P x) \\ &= -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} \\ &= -[(A - BK)x]^T P x - x^T P[(A - BK)x] \\ &= -x^T[(A - BK)^T P + P(A - BK)]x \end{aligned}$$

Para que a igualdade seja verdadeira para qualquer x:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T RK)$$

Para que a igualdade seja verdadeira para qualquer x:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T RK)$$

- Demonstra-se que se (A-BK) for estável, existe uma matriz definida positiva P que satisfaz a equação acima;
- Essa é a equação algébrica de Lyapunov, que pode ser escrita na forma:

$$\underbrace{A_{lyap}}_{A-BK} \underbrace{X_{lyap}}_{P} + X_{lyap} A_{lyap}^T + \underbrace{Q}_{Q+K^T RK} = 0$$

Pode-se resolver essa equação no MATLAB através da função lyap: X = lyap(A,Q);

Conhecida a matriz P, podemos calcular o índice de desempenho:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} -\frac{d}{dt}(x^T P x)dt$$
$$= \frac{1}{2}x(0)^T P x(0) - x(\infty)^T P x(\infty)$$

Se $A - BK$ for estável, então $x(\infty) \to 0$, logo:

$$J = \frac{1}{2}x(0)^T P x(0)$$

Ou seja, o índice de desempenho pode ser calculado a partir da condição inicial e de P. Note que, para um dado K, pode-se determinar um P através da solução da equação de Lyapunov.

Controle Moderno

Ajuste de ganhos - LQR - Realimentação de Estados

Desejamos encontrar K que minimize o índice de desempenho J. Pode-se demonstrar que a solução ótima do problema é:

$$K = R^{-1}B^TP$$

Onde P é a solução da equação de Riccati:

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q$$

Pode-se resolver o problema de regulação ótima (resolver P da equação de Riccati, obtendo K ótimo de realimentação de estados) através da função *lqr* do MATLAB. Ex.: K = lqr(A,B,Q,R)

Exemplo 1: Considere a dinâmica de período curto do A310, descrita pelas matrizes A_{pc} e B_{pc}, relacionada com os estados q e α, e controle δp:

$$A_{pc} = \begin{bmatrix} -0.9271 & -4.1409 \\ 1.0018 & -0.9766 \end{bmatrix} \qquad B_{pc} = \begin{bmatrix} -5.0975 \\ -0.0849 \end{bmatrix}$$

Incluindo a dinâmica de primeira ordem do atuador: $G(s) = \dfrac{1}{0.05s + 1}$

Que equivale à seguinte equação diferencial: $\dot{\delta p} = -20\delta p + 20u_{\delta p}$

Onde δp é a posição do profundor, e $u_{\delta p}$ é o sinal comandado de posição.

Precisamos agora obter as matrizes A e B da dinâmica aumentada, ou seja, incluindo δp como estado (além de q e α), e $u_{\delta p}$ como entrada:

$$A_a = \begin{bmatrix} -0.9271 & -4.1409 & -5.0975 \\ 1.0018 & -0.9766 & -0.0849 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \qquad B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1: Faremos o projeto LQR por realimentação de estados (q, α, δp).
Precisamos definir as matrizes Q e R.
Vamos escrever Q diagonal, ponderando oscilações em torno de equilíbrio para cada um dos estados. Inicialmente, tentaremos uma matriz identidade. Da mesma maneira, $R = 1$.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

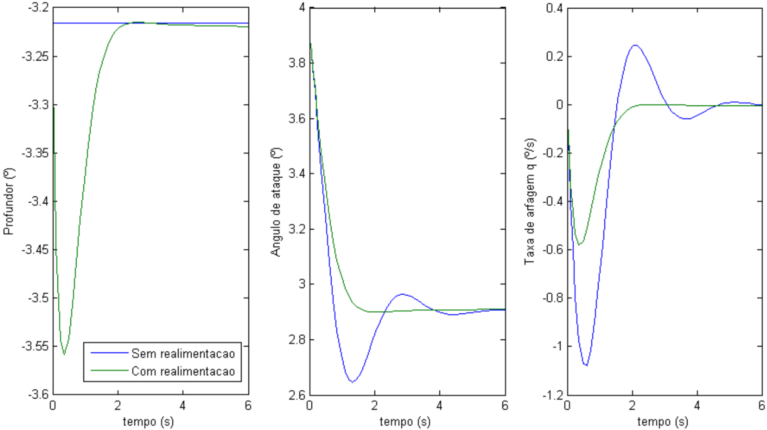
Lembrando que para minimizar o índice de desempenho, devemos resolver a equação de Riccati e calcular $K = R^{-1}B^TP$.
No MATLAB, a função *lqr* resolve a equação de Riccati e obtém K: *K = lqr(A,B,Q,R)*.
Para essa escolha de matrizes Q e R, obtém-se:

$$K = \begin{bmatrix} -0.7051 & 0.2032 & 0.5355 \end{bmatrix}$$

Controle Moderno

Ajuste de ganhos - LQR - Realimentação de Estados

Exemplo 1: Resposta para uma perturbação inicial de 1 ° no ângulo de ataque:



Exemplo 1:
Vamos considerar agora:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

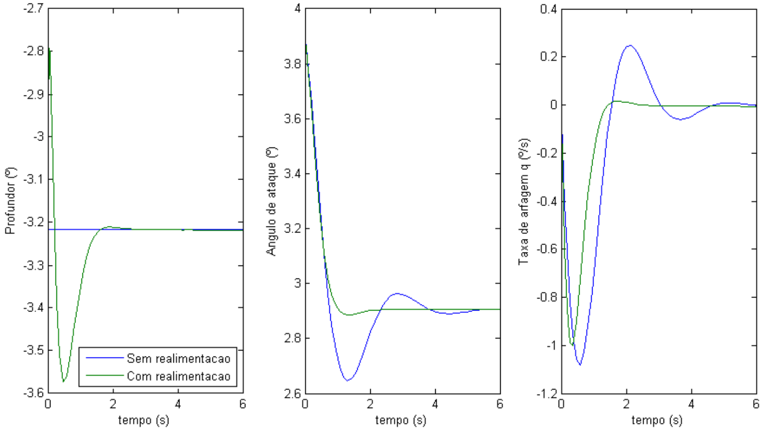
E manteremos R = 1. Nesse caso, estamos aumentando o peso dado à variações em relação ao ângulo de ataque de equilíbrio.
Obtém-se o seguinte K ótimo:

$$K = \begin{bmatrix} -1.0425 & -1.0794 & 0.5939 \end{bmatrix}$$

Controle Moderno

Ajuste de ganhos - LQR - Realimentação de Estados

Exemplo 1: Resposta para uma perturbação inicial de 1 ° no ângulo de ataque.



Exemplo 1:

- Note que no último caso, a resposta do ângulo de ataque à perturbação inicial foi mais rápida. Retornando ao equilíbrio mais rapidamente. Em compensação, a resposta da taxa de arfagem piorou.
- Ao escolher as matrizes Q e R dessa forma, estamos ponderando a qualidade da resposta em cada um dos estados ou entradas. Quando maior o peso dado à um dos estados, melhor será sua resposta à perturbações, mas pior será a dos demais estados.

Controle Moderno

Ajuste de ganhos - LQR - Realimentação de Estados

- A solução de Riccati fornece a matriz de ganhos que minimiza o índice de desempenho;
- Estamos supondo realimentação de todos os estados;
- Nem sempre temos disponíveis todos os estados;
- Existe uma técnica específica para realimentação de saídas (outro curso...).