

Equações do movimento completo

AB-722

Flávio Luiz Cardoso Ribeiro

<http://flavioluiz.github.io>

flaviocr@ita.br

Departamento de Mecânica do Voo
Divisão de Engenharia Aeronáutica e Aeroespacial
Instituto Tecnológico de Aeronáutica



2018

Introdução

Na primeira etapa do curso, consideramos o movimento apenas no plano vertical: 3 graus de liberdade (duas velocidades e uma rotação). Passaremos a trabalhar agora com o movimento tridimensional da aeronave.

- Sistemas de referências e transformações de coordenadas;
- Modelo aerodinâmico;
- Dedução das equações do movimento;
- Estabilidade e dinâmica;

Sistemas de referência

Sistema de Referência do Corpo

- X_B - Aponta em direção ao nariz da aeronave
- Z_B - No plano de simetria; aponta do dorso para o ventre da aeronave;
- Y_B - Completa o sistema destrógiro (aponta para a asa direita).

Sistema de Referência Aerodinâmico

- X_A - Alinhado ao vetor velocidade aerodinâmica;
- Z_A - No plano de simetria, perpendicular à X_A ;
- Y_A - Completa o sistema destrógiro (aponta para a asa direita).

Sistema de Referência Inercial (Terrestre)

- X_I - Aponta para o norte;
- Z_I - Aponta para o centro da Terra;
- Y_I - Completa o sistema destrógiro.

Ângulos de Euler

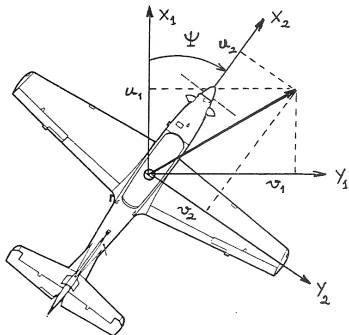
Os ângulos de Euler expressam a orientação relativa entre dois sistemas de referência. Rotações sucessivas, numa ordem determinada, levam um sistema a coincidir com o outro. Os três principais conjuntos de ângulos de Euler usados na mecânica do voo são:

- sistema inercial (terrestre) \rightarrow sistema do corpo: Ψ, Θ, Φ (proa, atitude longitudinal, inclinação lateral)
- sistema inercial (terrestre) \rightarrow sistema aerodinâmico: χ, γ, μ (rumo, ângulo de trajetória, rolamento aerodinâmico)
- sistema aerodinâmico \rightarrow sistema do corpo: $-\beta, \alpha, 0$ (ângulo de derrapagem, ângulo de ataque)

Ângulos de Euler

Sistema inercial para o sistema do corpo

1ª rotação: ângulo Ψ em torno do eixo z_I do sistema inercial. No final o eixo x está no plano ox_Bz_B do corpo.



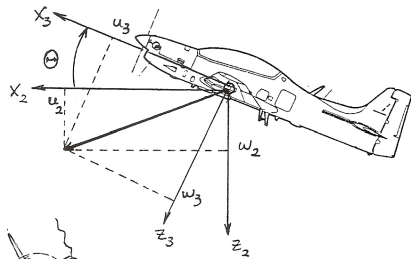
$$\begin{aligned}u_2 &= u_1 \cos \Psi + v_1 \sin \Psi \\v_2 &= -u_1 \sin \Psi + v_1 \cos \Psi \\w_2 &= w_1\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_\Psi} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

Sistema inercial para o sistema do corpo

2ª rotação: ângulo Θ em torno do eixo y do primeiro sistema intermediário. No final o eixo x do segundo sistema intermediário coincide com o do corpo.



$$u_3 = u_2 \cos \Theta - w_2 \sin \Theta$$

$$v_3 = v_2$$

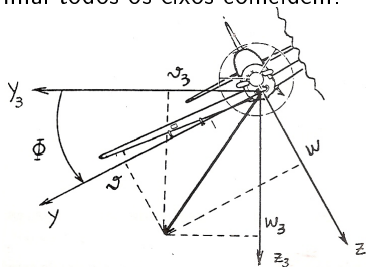
$$w_3 = u_2 \sin \Theta + w_2 \cos \Theta$$

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_\Theta} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

Sistema inercial para o sistema do corpo

3ª rotação: ângulo Φ em torno do eixo x do segundo sistema intermediário. No final todos os eixos coincidem.



$$u = u_3$$

$$v = v_3 \cos \Phi + w_3 \sin \Phi$$

$$w = -v_3 \sin \Phi + w_3 \cos \Phi$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_\Phi} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

Sistema inercial para o sistema do corpo

matriz de rotação para passar do sistema inercial para o sistema do corpo:

$$\mathcal{L}_{I2B} = \mathcal{L}_{\Phi} \mathcal{L}_{\Theta} \mathcal{L}_{\Psi} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & -\sin \Phi \cos \Psi + \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix}$$

Exemplo:

- força gravitacional no sistema inercial

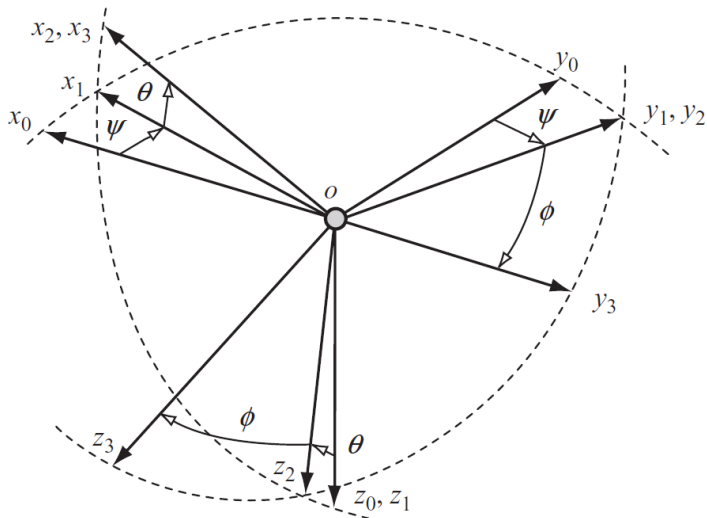
$$(\vec{F}_g)_I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$$

- força gravitacional no sistema do corpo

$$(\vec{F}_g)_b = \mathcal{L}_{I2B}(\vec{F}_g)_I = \begin{bmatrix} -mg \sin \Theta \\ mg \sin \Phi \cos \Theta \\ mg \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix}$$

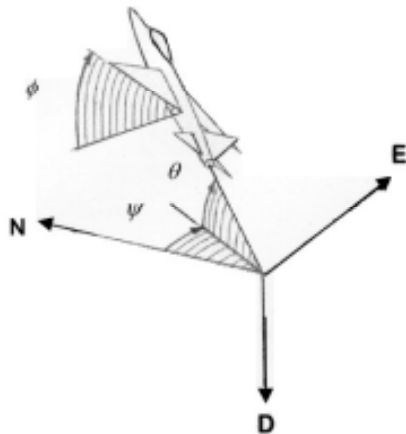
Ângulos de Euler

Sistema inercial para o sistema do corpo



Ângulos de Euler

Sistema inercial para o sistema do corpo



Ângulos de Euler

Sistema inercial para o sistema aerodinâmico

Lembrando que:

- sistema inercial \rightarrow sistema do corpo: Ψ , Θ , Φ (proa, atitude longitudinal, inclinação lateral)
- sistema inercial \rightarrow sistema aerodinâmico: χ , γ , μ (rumo, ângulo de trajetória, rolamento aerodinâmico)

Então a matriz de rotação para passar do sistema inercial para o sistema aerodinâmico é análoga à matriz que passa do sistema inercial para o sistema do corpo, bastando apenas trocar Ψ , Θ e Φ por χ , γ e μ .

$$\mathcal{L}_{I2A} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & \cos \gamma \sin \chi & -\sin \gamma \\ \sin \mu \sin \gamma \cos \chi - \cos \mu \sin \chi & \cos \mu \cos \chi + \sin \mu \sin \gamma \sin \chi & \sin \mu \cos \gamma \\ \cos \mu \sin \gamma \cos \chi + \sin \mu \sin \chi & -\sin \mu \cos \chi + \cos \mu \sin \gamma \sin \chi & \cos \mu \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

Sistema aerodinâmico para o sistema inercial

Como a matriz \mathcal{L}_{I2A} é ortogonal, a transformação inversa é bastante simples:

$$\mathcal{L}_{A2I} = \mathcal{L}_{I2A}^{-1} = \mathcal{L}_{I2A}^T =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi & \sin \mu \sin \gamma \cos \chi - \cos \mu \sin \chi & \cos \mu \sin \gamma \cos \chi + \sin \mu \sin \chi \\ \cos \gamma \sin \chi & \cos \mu \cos \chi + \sin \mu \sin \gamma \sin \chi & -\sin \mu \cos \chi + \cos \mu \sin \gamma \sin \chi \\ -\sin \gamma & \sin \mu \cos \gamma & \cos \mu \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

- velocidade aerodinâmica no sistema aerodinâmico

$$(\vec{V})_A = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

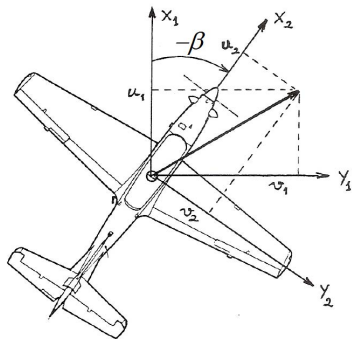
- velocidade aerodinâmica no sistema inercial

$$(\vec{V})_I = \mathcal{L}_{A2I}(\vec{V})_A = \begin{bmatrix} V \cos \gamma \cos \chi \\ V \cos \gamma \sin \chi \\ -V \sin \gamma \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

Sistema aerodinâmico para o sistema do corpo

1ª rotação: ângulo $-\beta$ em torno do eixo z_A . No final os eixos y coincidem



$$\begin{aligned}u_2 &= u_1 \cos \beta - v_1 \sin \beta \\v_2 &= u_1 \sin \beta + v_1 \cos \beta \\w_2 &= w_1\end{aligned}$$

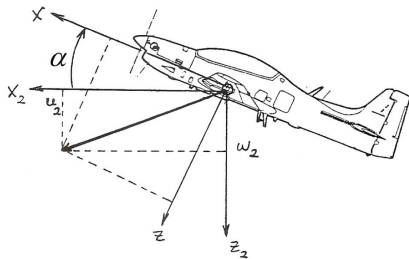
$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_\beta} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

Sistema aerodinâmico para o sistema do corpo

2ª rotação: ângulo α em torno do eixo y do sistema intermediário. No final, todos

os eixos coincidem.



$$\begin{aligned}u &= u_2 \cos \alpha - w_2 \sin \alpha \\v &= v_2 \\w &= u_2 \sin \alpha + w_2 \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_\alpha} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

Sistema aerodinâmico para o sistema do corpo

Matriz de transformação do sistema aerodinâmico para o sistema do corpo:

$$\mathcal{L}_{A2B} = \mathcal{L}_\alpha \mathcal{L}_\beta = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

- força de arrasto aerodinâmico no sistema aerodinâmico

$$(\vec{D})_A = \begin{bmatrix} -qSC_D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- força de arrasto aerodinâmico no sistema do corpo

$$(\vec{D})_B = \mathcal{L}_{A2B}(\vec{D})_A = \begin{bmatrix} -qSC_D \cos \alpha \cos \beta \\ -qSC_D \sin \beta \\ -qSC_D \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

Sistema aerodinâmico para o sistema do corpo

- força de sustentação aerodinâmica no sistema do corpo

$$(\vec{L})_B = \mathcal{L}_{AB} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -qSC_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qSC_L \sin \alpha \\ 0 \\ -qSC_L \cos \alpha \end{bmatrix}$$

- força lateral aerodinâmica no sistema do corpo

$$(\vec{F}_Y)_B = \mathcal{L}_{AB} \begin{bmatrix} 0 \\ qSC_Y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qSC_Y \cos \alpha \sin \beta \\ qSC_Y \cos \beta \\ -qSC_Y \sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix}$$

- força total aerodinâmica no sistema do corpo

$$\vec{F}_A = \vec{D} + \vec{F}_Y + \vec{L} = \begin{bmatrix} -qSC_D \cos \alpha \cos \beta + qSC_L \sin \alpha - qSC_Y \cos \alpha \sin \beta \\ -qSC_D \sin \beta + qSC_Y \cos \beta \\ -qSC_D \sin \alpha \cos \beta - qSC_L \cos \alpha - qSC_Y \sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

Sistema aerodinâmico para o sistema do corpo

Exemplo 2:

- velocidade aerodinâmica no sistema aerodinamico

$$(\vec{V})_a = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- velocidade aerodinâmica no sistema do corpo

$$(\vec{V})_B = \mathcal{L}_{A2B}(\vec{V})_A = \begin{bmatrix} V \cos \alpha \cos \beta \\ V \sin \beta \\ V \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Note que:

$$\alpha = \arctan \frac{w}{u}, \quad \beta = \arcsin \frac{v}{V}, \quad V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

Ângulos de Euler

Sistema aerodinâmico para o sistema do corpo

Em outras palavras:

- o ângulo de derrapagem (β) é o ângulo entre o vetor-velocidade e o plano de simetria da aeronave;
- o ângulo de ataque (α) é o ângulo formado pela componente do vetor-velocidade no plano de simetria da aeronave com a linha de referência da fuselagem (LRF).

Ângulos de Euler

Sistema da propulsão para o sistema do corpo

1ª rotação: ângulo β_F em torno do eixo z do motor. No final os eixos y coincidem.

$$\mathcal{L}_{\beta_F} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_F) & -\sin(\beta_F) & 0 \\ \sin(\beta_F) & \cos(\beta_F) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2ª rotação: ângulo α_F em torno do eixo y do motor. No final todos os eixos coincidem.

$$\mathcal{L}_{\alpha_F} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_F) & 0 & -\sin(\alpha_F) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha_F) & 0 & \cos(\alpha_F) \end{bmatrix}$$

matriz para passar do sistema do motor para o sistema do corpo.

$$\mathcal{L}_{P2B} = \mathcal{L}_{\alpha_F} \mathcal{L}_{\beta_F} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_F) \cos(\beta_F) & -\cos(\alpha_F) \sin(\beta_F) & -\sin(\alpha_F) \\ \sin(\beta_F) & \cos(\beta_F) & 0 \\ \sin(\alpha_F) \cos(\beta_F) & -\sin(\alpha_F) \sin(\beta_F) & \cos(\alpha_F) \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

do sistema da propulsão para o sistema do corpo

Exemplo 1:

- força propulsiva no sistema de referência do motor

$$(\vec{F})_P = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- força propulsiva no sistema de referência do corpo

$$(\vec{F})_B = \mathcal{L}_{P2B}(\vec{F})_P = \begin{bmatrix} F \cos(\alpha_F) \cos(\beta_F) \\ F \sin(\beta_F) \\ F \sin(\alpha_F) \cos(\beta_F) \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

Sistema da propulsão para o sistema do corpo

Exemplo 2:

- momento causado pelo arrasto aerodinâmico na hélice no sistema de referência do motor.

$$(\vec{M}_h)_P = \begin{bmatrix} M_h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- momento causado pelo arrasto aerodinâmico na hélice no sistema de referência do corpo.

$$(\vec{M}_h)_B = \mathcal{L}_{P2B}(\vec{M}_h)_P = \begin{bmatrix} M_h \cos(\alpha_F) \cos(\beta_F) \\ M_h \sin(\beta_F) \\ M_h \sin(\alpha_F) \cos(\beta_F) \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

Relação entre velocidade angular e as derivadas dos ângulos de Euler

$\dot{\Psi}$, $\dot{\Theta}$ e $\dot{\Phi}$ são componentes não ortogonais de $\vec{\omega}$

- a velocidade angular $\dot{\Phi}$ já está no sistema do corpo;
- a velocidade angular $\dot{\Theta}$ necessita de uma rotação Φ para ser expressa no sistema do corpo;
- a velocidade angular $\dot{\Psi}$ necessita de duas rotações (Θ e Φ) para ser expressa no sistema do corpo.

$$(\vec{\omega}_b)_b = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathcal{L}_\Phi \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathcal{L}_\Phi \mathcal{L}_\Theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \cos \Theta \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

Relação entre velocidade angular e as derivadas dos ângulos de Euler

Invertendo a expressão anterior obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \Phi \tan \Theta & \cos \Phi \tan \Theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi / \cos \Theta & \cos \Phi / \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Analogamente, tem-se a relação entre o vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ da aeronave nos eixos aerodinâmicos e as derivadas dos ângulos de Euler $\dot{\chi}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\mu}$:

$$(\vec{\omega}_a)_a = \begin{bmatrix} p_a \\ q_a \\ r_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & \cos \mu & \sin \mu \cos \gamma \\ 0 & -\sin \mu & \cos \mu \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mu} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\chi} \end{bmatrix}$$

Revisão

2ª Lei de Newton para translação:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

- \vec{p} é a quantidade de movimento linear ($m\vec{v}$);
- A derivada temporal deve ser feita em relação ao referencial inercial.

Pode-se demonstrar que: $\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} + \vec{\omega}_{X,I} \times \vec{x}$

- \vec{x} é um vetor escrito num sistema de coordenadas X qualquer;
- o sistema de coordenadas X rotaciona em relação ao inercial com velocidade angular $\vec{\omega}_{X,I}$;
- $\frac{d\vec{x}}{dt}$ é a derivada temporal de \vec{x} em relação ao referencial inercial, mas escrito no sistema de coordenadas de X.

Revisão

2ª Lei de Newton para rotação:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \sum \vec{M}_{ext}$$

- \vec{l} é a quantidade de movimento angular;
- A derivada temporal deve ser feita em relação ao referencial inercial.

Para corpos rígidos:

$$\vec{l} = [I]\vec{\omega}$$
$$\vec{l} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \vec{\omega}$$

Matriz de inércia:

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{xy} = \int_V xy dm$$

$$I_{yy} = \int_V (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{xz} = \int_V xz dm$$

$$I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{yz} = \int_V yz dm$$

- A matriz varia de acordo com o sistema de coordenadas escolhido;
- Para um corpo rígido, devemos escolher um sistema de coordenadas fixo ao corpo, caso contrário a matriz irá variar ao longo do tempo;
- Muitas aeronaves exibem simetria de distribuição de massa em relação ao plano x-z: $I_{xy} = I_{yz} = 0$.

Dedução das Equações do Movimento

Hipóteses

- A Terra é considerada um sistema inercial plano;
- Desconsideramos, inicialmente, a presença do vento;
- A aeronave é simétrica em relação ao plano $x_B z_B$;
- A variação de massa ao longo do tempo será desconsiderada.

Dedução das Equações do Movimento

Dinâmica de Translação

Deduziremos no sistema de coordenadas do corpo:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_B \quad \vec{p} = m \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_B \quad \omega_{B,I} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_B$$

Derivando-se no tempo a quantidade de movimento em relação ao referencial inercial e aplicando a Segunda Lei de Newton:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} + \vec{\omega}_{B,I} \times \vec{p} = \sum F_{ext}$$
$$m \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_B \times m \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_B = \sum F_{extB}$$

Dedução das Equações do Movimento

Dinâmica de Translação

$$m \begin{bmatrix} \dot{u} - rv + qw \\ \dot{v} - pw + ru \\ \dot{w} - qu + pv \end{bmatrix}_B = \sum F_{extB}$$

Onde o somatório das forças externas $\sum F_{extB}$ é composto pelas contribuições aerodinâmicas, propulsivas e força peso:

$$\sum F_{extB} = \vec{F}_A + \vec{F} + \vec{P}$$

Dedução das Equações do Movimento

Dinâmica de Translação

Forças Aerodinâmicas:

- Sustentação (L);
- Arrasto (D);
- Força Aerodinâmica Lateral (Y);

$$\vec{F}_A = \begin{bmatrix} F_{A,X} \\ F_{A,Y} \\ F_{A,Z} \end{bmatrix}_B = \mathcal{L}_{A2B} \begin{bmatrix} -D \\ Y \\ -L \end{bmatrix}_A$$

onde:

$$\mathcal{L}_{A2B} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Dedução das Equações do Movimento

Dinâmica de Translação

Força Peso:

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{bmatrix}_B = \mathcal{L}_{I2B} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}_I$$

onde:

$$\mathcal{L}_{I2B} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & -\sin \Phi \cos \Psi + \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix}$$

$$P_X = -mg \sin(\theta)$$

$$P_Y = mg \cos(\theta) \sin(\Phi)$$

$$P_Z = mg \cos(\theta) \cos(\Phi)$$

Dedução das Equações do Movimento

Dinâmica de Translação

Força propulsiva:

Suponhamos que a força propulsiva esteja no plano XZ da aeronave, inclinada de um ângulo α_F em relação ao eixo X_B :

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} F \cos(\alpha_F) \\ 0 \\ -F \sin(\alpha_F) \end{bmatrix}_B$$

Dedução das Equações do Movimento

Dinâmica de Rotação

Deduziremos no sistema de coordenadas do corpo:

$$\vec{l} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_B$$

Derivando-se a quantidade de movimento em relação ao referencial inercial e aplicando a Segunda Lei de Newton para rotação:

$$\dot{\vec{l}} + \vec{\omega}_{B,I} \times \vec{l} = \sum M_B$$

Lembrando que da hipótese de aeronave simétrica: $I_{xy} = I_{yz} = 0$.

$$I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + (I_{zz} - I_{yy})qr - I_{xz}pq = M_{ext,X}$$

$$I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp + I_{xz}(p^2 - r^2) = M_{ext,Y}$$

$$I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} + (I_{yy} - I_{xx})pq + I_{xz}rq = M_{ext,Z}$$

Dedução das Equações do Movimento

Dinâmica de Rotação

Os momentos externos são compostos pelas contribuições aerodinâmicas e propulsivas. Assumiremos que o momento propulsivo age apenas em torno do eixo Y_B , sendo representado por m_F .

$$\begin{aligned}I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + (I_{zz} - I_{yy})qr - I_{xz}pq &= l_a \\ I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp + I_{xz}(p^2 - r^2) &= m_a + m_F \\ I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} + (I_{yy} - I_{xx})pq + I_{xz}rq &= n_a\end{aligned}$$

Onde: l_A , m_A e n_A são os momentos aerodinâmicos em torno dos eixos X_B , Y_B e Z_B , respectivamente.

Dedução das Equações do Movimento

Dinâmica de Rotação

Podemos desacoplar as equações acima e isolar as derivadas das variáveis p , q e r :

$$\dot{p} = \frac{I_{xz}n_A + I_{zz}l_A + I_{xz}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})pq - (I_{xz}^2 - I_{yy}I_{zz} + I_{zz}^2)qr}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}$$
$$\dot{q} = \frac{m_A + m_F - (I_{xx} - I_{zz})rp - I_{xz}(p^2 - r^2)}{I_{yy}}$$
$$\dot{r} = \frac{I_{xx}n_A + I_{xz}l_A - I_{xz}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})qr + (I_{xx}^2 - I_{xx}I_{yy} + I_{xz}^2)pq}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}$$

Dedução das Equações do Movimento

Relações cinemáticas

Temos 6 equações (3 relacionadas à dinâmica de translação, e 3 relacionadas à dinâmica de rotação). Precisamos agora de expressões que permitam definir a posição (x_I, y_I, H_I) e a atitude da aeronave (Φ, θ, ψ) .

Cinemática de translação

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{z}_I \end{bmatrix}_I = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ -\dot{H} \end{bmatrix}_I = \mathcal{L}_{B2I} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_B$$

Onde $\mathcal{L}_{B2I} = \mathcal{L}_{I2B}^T$, e \mathcal{L}_{I2B} foi obtida no capítulo anterior.

$$\mathcal{L}_{I2B} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & -\sin \Phi \cos \Psi + \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix}$$

Dedução das Equações do Movimento

Relações cinemáticas

Logo, as equações cinemáticas de translação ficam:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \cos \Theta \cos \Psi + v(\sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi) + w(\cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi) \\ \dot{y} &= u \cos \Theta \sin \Psi + v(\cos \Phi \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi) + w(-\sin \Phi \cos \Psi + \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi) \\ \dot{H} &= u \sin \Theta - v \sin \Phi \cos \Theta - w \cos \Phi \cos \Theta\end{aligned}$$

Cinemática de rotação Já foi apresentada anteriormente (Relação entre velocidade angular e derivadas dos ângulos de Euler):

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \Phi \tan \Theta & \cos \Phi \tan \Theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi / \cos \Theta & \cos \Phi / \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Dedução das Equações do Movimento

Equações do movimento

Completamos, assim, o conjunto das 12 equações do movimento completo;

Dinâmica de translação:

$$\dot{u} = rv - qw + F_{ext,x}/m$$

$$\dot{v} = pw - ru + F_{ext,y}/m$$

$$\dot{w} = qu - pv + F_{ext,z}/m$$

Dinâmica de rotação:

$$\dot{p} = \frac{I_{xz}n_A + I_{zz}l_A + I_{xz}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})pq - (I_{xz}^2 - I_{yy}I_{zz} + I_{zz}^2)qr}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}$$

$$\dot{q} = \frac{m_A + m_F - (I_{xx} - I_{zz})rp - I_{xz}(p^2 - r^2)}{I_{yy}}$$

$$\dot{r} = \frac{I_{xx}n_A + I_{xz}l_A - I_{xz}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})qr + (I_{xx}^2 - I_{xx}I_{yy} + I_{xz}^2)pq}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}$$

Dedução das Equações do Movimento

Equações do movimento

Cinemática de translação:

$$\dot{x} = u \cos \Theta \cos \Psi + v(\sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi) + w(\cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi)$$

$$\dot{y} = u \cos \Theta \sin \Psi + v(\cos \Phi \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi) + w(-\sin \Phi \cos \Psi + \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi)$$

$$\dot{H} = u \sin \Theta - v \sin \Phi \cos \Theta - w \cos \Phi \cos \Theta$$

Cinemática de rotação:

$$\dot{\Phi} = p + q \sin \Phi \tan \Theta + r \cos \Phi \tan \Theta$$

$$\dot{\Theta} = q \cos \Phi - r \sin \Phi$$

$$\dot{\Psi} = q \sin \Phi / \cos \Theta + r \cos \Phi / \cos \Theta$$

Dedução das Equações do Movimento

Equações do movimento

Temos um total de 12 variáveis de estado:

- $u, v, w, p, q, r, \Phi, \theta, \psi, x_I, y_I, H$.
- Três variáveis são ignoráveis: ψ, x_I, y_I .

Em geral, temos quatro variáveis de controle:

- $\delta p, \delta a, \delta r, \pi$ (deflexão de profundor, aileron, leme e manete)

Dedução das Equações do Movimento

Equações do movimento

Vimos ainda que:

$$u = V \cos \alpha \cos \beta$$

$$v = V \sin \beta$$

$$w = V \sin \alpha \cos \beta$$

Pode-se chegar às seguintes relações:

$$\dot{V} = (u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w})/V$$

$$\dot{\alpha} = (u\dot{w} - w\dot{u})/(u^2 + w^2)$$

$$\dot{\beta} = (V\dot{v} - v\dot{V})/(V\sqrt{u^2 + w^2})$$

Dessa forma, podemos reescrever as equações e substituir os estados (u,v,w) por (V, α, β) .

Modelo Propulsivo

Resta ainda, definir como as forças e momentos externos (propulsivos e aerodinâmicos) são calculados.

Usaremos a mesma equação para modelar a tração apresentada no estudo do movimento longitudinal:

$$F = \pi F_{max,i} \left(\frac{V}{V_i} \right)^{n_v} \left(\frac{\rho}{\rho_i} \right)^{n_\rho}$$

Naturalmente, o mesmo modelo atmosférico (ISA) pode ser empregado.

Modelo Aerodinâmico

Já vimos que as forças aerodinâmicas são funções não lineares de:

- α (ângulo de ataque)
- β (ângulo de derrapagem)
- p, q, r (velocidades angulares de rotação)
- Re (número de Reynolds)
- M (número de Mach)
- Deflexão das superfícies de comando
- Efeitos não estacionários

Admitiremos as seguintes hipóteses:

- Escoamento quase-estacionário;
- Linearização;

Modelo Aerodinâmico

- No estudo do movimento longitudinal, vimos que C_L e C_m dependem de α , $\dot{\alpha}$, δp e q , através das respectivas derivadas de estabilidade e controle. C_D pode ser calculado por meio da polar de arrasto da aeronave.

Deveremos considerar, agora, as influências de outros fatores sobre as forças e momentos aerodinâmicos:

- Derrapagem β
- Velocidades angulares p e r ;
- Deflexões do leme (δr) e aileron (δa).

Modelo Aerodinâmico

Para o caso das forças L, D , e momentos longitudinais m_A , assumiremos que podem ser calculadas da mesma forma já vista no estudo do movimento longitudinal. Ou seja, vamos ignorar a contribuição das variáveis descritas acima.

$$C_L = C_{L0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta p}} \delta p + C_{L_q} \left(\frac{qc}{V_{ref}} \right)$$

$$C_D = C_{D0} + K_1 C_L + K_2 C_L^2$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\delta p}} \delta p + C_{m_q} \left(\frac{qc}{V_{ref}} \right) + C_{m_{\dot{\alpha}}} \left(\frac{\dot{\alpha}c}{V_{ref}} \right)$$

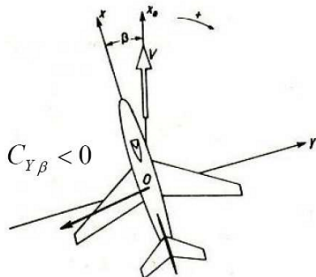
Modelo Aerodinâmico

Força Aerodinâmica Lateral: Depende de

- derrapagem (β), deflexão do leme (δr) e deflexão do aileron (δa).

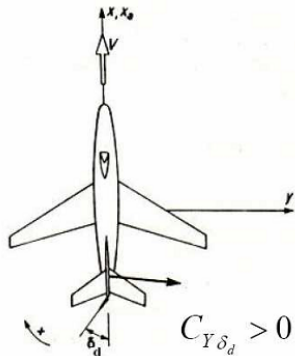
$$C_Y = C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_{\delta r}} \delta r + C_{Y_{\delta a}} \delta a$$

Note que $C_{Y_0} = 0$, ou seja, dada a simetria da aeronave e do escoamento quando a derrapagem e deflexões são nulas, não há força aerodinâmica lateral.



Note, na figura ao lado, que uma derrapagem positiva (escoamento à direita) causa uma força aerodinâmica negativa ($C_{Y_\beta} < 0$).

Modelo Aerodinâmico



Note, na figura ao lado, uma deflexão positiva do leme (pedal esquerdo acionado) causa uma força aerodinâmica positiva.

Modelo Aerodinâmico

E quanto à força lateral produzida pelo acionamento dos ailerons e spoilers? Em geral, se as superfícies de comando estão longe da fuselagem, o coeficiente $C_{Y_{\delta a}}$ é nulo. Se as superfícies estão próximas da fuselagem, suas deflexões podem causar alterações no escoamento próximo da fuselagem, gerando força lateral. Em geral, análises de CFD ou ensaios são necessários para determinar o valor de $C_{Y_{\delta a}}$.

- À rigor, as forças aerodinâmicas laterais dependem também de p e r , mas, muitas vezes o efeito é pequeno e pode ser desprezado.

Modelo Aerodinâmico

Momento de rolamento: Depende de

- derrapagem (β), velocidade de rolamento e guinada (p e r) deflexão do leme (δr) e do aileron (δa).

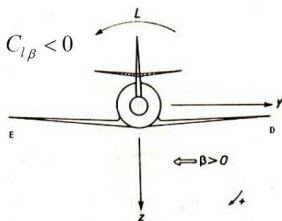
$$C_l = C_{l_\beta} \beta + C_{l_{\delta r}} \delta r + C_{l_{\delta a}} \delta a + C_{l_p} \frac{pb}{V_{ref}} + C_{l_r} \frac{rb}{V_{ref}}$$

Como a resultante das forças laterais devido à derrapagem não passa necessariamente pelo CG, espera-se que β induza um momento de rolamento. Alguns fatores influenciam decisivamente a derivada de estabilidade associada (C_{l_β}):

- Diedro das asas;
- Posição relativa das asas (alta, média ou baixa);
- Tamanho da empenagem vertical;
- Presença de quilha.

Modelo Aerodinâmico

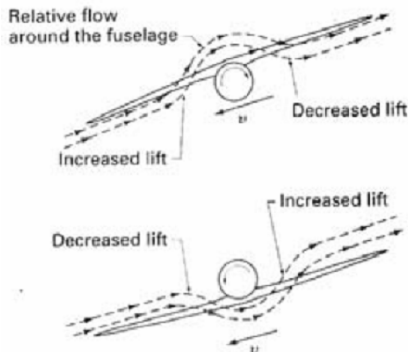
- Imaginemos uma derrapagem positiva em uma aeronave com diedro também positivo. Nesse caso, a tendência é que a asa direita seja levantada, gerando um momento negativo, ou seja, $C_{l_\beta} < 0$;
- Asas altas tendem a causar diminuição algébrica no valor de C_{l_β} ;
- Derivas grandes causam diminuição algébrica de C_{l_β} ;



- O oposto ocorre se a aeronave tiver quilhas (*ventral fins*) grandes. Aumento algébrico de C_{l_β} ;
- O efeito das quilhas e deriva se explica pela posição relativa entre a resultante das forças laterais sobre as superfícies verticais e o eixo X_B ;
- Aeronaves de asa alta, diedro positivo alto, grande deriva e sem quilhas terão um valor bastante negativo de C_{l_β} .

Modelo Aerodinâmico

Efeito de asa alta/baixa sobre o C_{l_β} :



- Asa alta tende a diminuir o C_{l_β} ;
- Asa baixa tende a aumentar o C_{l_β} .

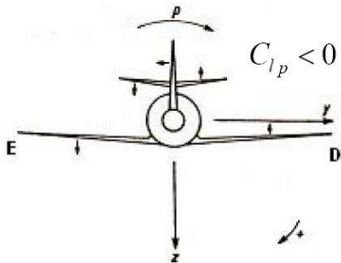
Modelo Aerodinâmico

- Em geral, boa qualidade de vôo é obtida quando C_{l_β} é negativo, porém, com valor absoluto não muito alto;
- Assim, a maioria dos aviões de asa baixa possuem diedro positivo;
- Da mesma forma, em alguns casos, aviões de asa alta tem diedro negativo;
- O efeito da derivada C_{l_β} é conhecido como *efeito de diedro*.

Modelo Aerodinâmico

- Observemos o efeito de uma guinada (r) positiva. A asa esquerda avança mais rápido que a direita, logo, há um aumento da sustentação sobre a asa esquerda. O efeito é um momento de rolamento positivo ($C_{l_r} > 0$). Além disso, um ângulo de ataque efetivo é induzido na EV, gerando uma força que tende à baixar a asa direita;

Modelo Aerodinâmico



- O efeito de rolamento (p) positivo é uma indução de ângulo de ataque efetivo positivo na asa direita e negativo na asa esquerda. Efeito análogo ocorre na deriva. O resultado é um momento de rolamento negativo, $C_{lp} < 0$. Note que trata-se de um efeito de amortecimento aerodinâmico.

Modelo Aerodinâmico

- Deflexão positiva de aileron (manche à esquerda): a sustentação da asa esquerda diminui e da direita aumenta, logo $C_{l_{\delta a}} < 0$;
- Deflexão positiva do leme (pedal esquerdo): a sustentação da EV aumenta. Como a mesma está, em geral, acima do eixo X_B , o efeito é $C_{l_{\delta r}} > 0$;
- Em geral, quando o aileron direito (δa_d) baixa, o esquerdo (δa_e) sobe e vice-versa. Convencionou-se que a deflexão do aileron (δa) é dada por:
$$\delta a = 1/2(\delta a_e + \delta a_d)$$
- Se spoilers forem usados para controle de rolamento, manche à esquerda faz o spoiler da asa esquerda se defletir, diminuindo a sustentação nessa asa.

Momento de guinada: Depende de

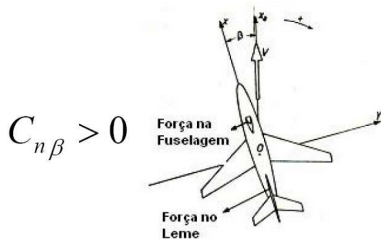
- derrapagem (β), velocidade de rolamento e guinada (p e r), deflexão do aileron (δa) e do leme (δr).

$$C_n = C_{n_\beta} \beta + C_{n_{\delta r}} \delta r + C_{n_{\delta a}} \delta a + C_{n_p} \frac{pb}{V_{ref}} + C_{n_r} \frac{rb}{V_{ref}}$$

- Como a resultante das forças laterais devido à derrapagem não passa necessariamente pelo CG, espera-se que β induza um momento de guinada;
- A resultante da força devido à β pode ser decomposta nas contribuições da deriva e da fuselagem;
- Como a deriva está atrás do CG, sua contribuição é aumentar o valor de C_{n_β} ;
- O CA da fuselagem, em geral, localiza-se à frente do CG, de modo que essa estrutura tende à diminuir o valor de C_{n_β} .

Modelo Aerodinâmico

Em geral, a contribuição da deriva é maior, assim $C_{n\beta} > 0$.



Observe que trata-se de um efeito estabilizante dada uma perturbação de β . Busca-se, no projeto, que a empenagem vertical seja suficientemente grande de tal forma a garantir que $C_{n\beta} > 0$.

Modelo Aerodinâmico

- O efeito da velocidade de rolamento (p) sobre o momento de guinada é, em geral, desprezível para aeronaves convencionais $C_{n_p} \approx 0$;
- O efeito da velocidade de guinada (r) sobre o momento de guinada é o seguinte: um ângulo de ataque efetivo é induzido sobre a deriva, originando uma força para a direita. Como a deriva localiza-se atrás do CG, um momento de guinada negativo é produzido ($C_{n_r} < 0$). Como a asa esquerda move-se mais rapidamente, uma maior sustentação aumentando o arrasto nessa asa. O efeito tende, também, a produzir um momento de guinada negativo;
- Logo, o efeito de C_{n_r} negativo é de amortecimento aerodinâmico.

Modelo Aerodinâmico

- Manche à esquerda, logo deflexão positiva do aileron ou spoiler, causa um aumento da sustentação na asa direita e diminuição na esquerda. Como consequência, o arrasto aumenta na asa direita e diminui na esquerda, O resultado é um momento de guinada positivo ($C_{n_{\delta_a}} > 0$);
- O efeito de guinada produzido pelos ailerons é chamado de efeito de guinada adversa. Ele é mais notado em aeronaves de asas alongadas, tais como os planadores;
- Quando o pedal esquerdo é acionado ($\delta r > 0$) uma força à direita é produzida na EV. O efeito é, então, uma guinada negativa ($C_{n_{\delta_r}} < 0$).

Modelo Aerodinâmico

A tabela abaixo resume os principais efeitos associados às derivadas de estabilidade e controle látero-direcionais.

	β	p	r	δa	δr
> 0 se	vento a direita	asa direita baixa	nariz a direita	manche a esquerda	pe a esquerda
C_Y	< 0	NA	NA	?	> 0
C_l	< 0	< 0	> 0	< 0	> 0
C_n	> 0	≈ 0	< 0	> 0	< 0

- O estudo apresentado se aplica a aeronaves convencionais. Naturalmente diferenças podem ser notadas no caso de aeronaves de configuração não ortodoxa.
- Métodos de estimativa das derivadas de estabilidade e controle látero-direcionais semelhantes aos vistos no estudo do movimento longitudinal podem ser também aplicados. A série de livros do Roskam, por exemplo, pode ser consultada.

Cálculo do Equilíbrio

- Vamos calcular a condição de equilíbrio para uma aeronave em voo curvilíneo horizontal estabilizado.
- Trata-se de uma condição permanente de vôo: situação na qual não há variação nas forças externas atuando sobre aeronave.
- Em uma curva horizontal estabilizada, tem-se uma velocidade angular Ω constante em relação ao sistema inercial.
- O vetor velocidade angular está alinhado com o eixo Z do sistema terrestre Z_I .

Vimos que:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \cos \Theta \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}$$

Logo ($\dot{\Phi} = \dot{\Theta} = 0$, $\dot{\Psi} = \Omega$):

$$p_E = -\Omega \sin \theta_E$$

$$q_E = \Omega \sin \Phi_E \cos \theta_E$$

$$r_E = \Omega \cos \Phi_E \cos \theta_E$$

Cálculo do Equilíbrio

- Para condição de voo permanente devemos impor ainda que as equações de força e momento sejam mantidas em equilíbrio.

Devemos anular as 3 equações de forças no equilíbrio, bem como as 3 equações de momento. Além disso, das equações cinemáticas, apenas a variação de altura deve ser zerada. Em geral, define-se: V_E , H_E , Ω_E .

- Temos 7 equações;

$$\dot{u} = 0$$

- 8 variáveis desconhecidas: $\alpha, \beta, \Phi_E, \theta_E, \delta p_E, \delta a_E, \pi_E$.

$$\dot{v} = 0$$

- Podemos arbitrar um valor para uma delas e calcular as outras sete de modo a resolver o conjunto de equações;

$$\dot{w} = 0$$

$$\dot{p} = 0$$

- Soluções analíticas simplificadas podem ser tentadas.

$$\dot{q} = 0$$

Focaremos, porém, nas soluções numéricas. Pode-se implementar numericamente no MATLAB empregando-se a função *fsolve*, de maneira análoga ao caso do movimento longitudinal.

$$\dot{r} = 0$$

$$\dot{H} = 0$$

Cálculo do equilíbrio

Curva com asas niveladas

- Utilizaremos os seguintes dados de equilíbrio: V_E , Ω_E , H_E e Φ_E . Para asas niveladas, $\Phi_E = 0$
- Calculamos α_E , β_E , θ_E , δp_E , δa_E , δr_E , π_E

Condições de Equilíbrio

Altitude(m): 30

Velocidade(m/s): 33

Omega(°/s): 1

Inclinação lateral (°): 0

Resultados do Equilíbrio

Manete(%): 98.467

Angulo de ataque(°): -0.30489

Angulo de derrapagem(°): -17.6516

Angulo de atitude(°): -0.30489

Angulo de inclinação lateral(°): 0

Deflexão do profundor(°): -0.044174

Deflexão do aileron(°): 6.276

Deflexão do leme(°): -12.7798

- Temos vento vindo da esquerda ($\beta < 0$);
- Pedal direito acionado ($\delta r < 0$);
- Manche à esquerda ($\delta a > 0$);
- Note que grandes deflexões de comandos são necessárias;
- Esse tipo de curva (deescoordenada) gera forças de inércia laterais desagradáveis ao passageiro e é pouco usada na prática.

Cálculo do equilíbrio

Curva coordenada

- Utilizaremos os seguintes dados de equilíbrio: V_E , Ω_E , H_E e β_E . Para curva coordenada, $\beta_E = 0$
- Calculamos α_E , ϕ_E , θ_E , δp_E , δa_E , δr_E , π_E

Condições de Equilíbrio

Altitude(m): 30

Velocidade(m/s): 33

Omega(°/s): 1

Angulo de Derrapagem (°): 0

Resultados do Equilíbrio

Manete(%): 94.8728

Angulo de ataque(°): -0.2981

Angulo de derrapagem(°): 0

Angulo de atitude(°): -0.29758

Angulo de inclinação lateral(°): 3.3719

Deflexão do profundor(°): -0.051786

Deflexão do aileron(°): 0.019343

Deflexão do leme(°): -0.083004

- Temos curva à direita;
- Asa direita abaixada ($\Phi > 0$)
- Pedal direito acionado ($\delta r < 0$);
- Manche à esquerda ($\delta a > 0$);
- Esse tipo de curva é chamada de curva coordenada. O piloto atua em ambos os comandos visando manter a derrapagem nula;
- Veja que as deflexões de comando exigidas são relativamente pequenas.

Cálculo do equilíbrio

Aeronave glissada

- Utilizaremos os seguintes dados de equilíbrio: V_E , Ω_E , H_E e β_E . Para vôo reto com aeronave glissada, $\beta_E \neq 0$, $\Omega_E = 0$;
- Calculamos α_E , ϕ_E , θ_E , δp_E , δa_E , δr_E , π_E ;
- Assim como na curva descoordenada o uso da glissada pode trazer sensações desagradáveis de aceleração lateral para os passageiros;

Condições de Equilíbrio

Altitude(m): 30

Velocidade(m/s): 33

Omega(°/s): 0

Angulo de Derrapagem (°): 5

Resultados do Equilíbrio

Manete(%): 95.1394

Angulo de ataque(°): -0.30557

Angulo de derrapagem(°): 5

Angulo de atitude(°): -0.2258

Angulo de inclinação lateral(°): 0.91139

Deflexão do profundor(°): -0.04377

Deflexão do aileron(°): -1.7722

Deflexão do leme(°): 3.5965

- Vento à esquerda ($\beta > 0$);
- Pedal direito acionado ($\delta r > 0$);
- Manche para a esquerda ($\delta a < 0$);
- Note os “comandos cruzados” típicos da glissada;
- Em aeronaves pequenas é um recurso bastante usado, especialmente durante o pouso.

Cálculo do equilíbrio

Vôo reto nivelado

- Utilizaremos os seguintes dados de equilíbrio: V_E , Ω_E , H_E e β_E . Para vôo reto nivelado, $\beta_E = 0$, $\Omega_E = 0$
- Calculamos α_E , ϕ_E , θ_E , δp_E , δa_E , δr_E , π_E

Condições de Equilíbrio

Altitude(m): 30

Velocidade(m/s): 33

Omega(°/s): 0

Angulo de Derrapagem (°): 0

Resultados do Equilíbrio

Manete(°): 94.8705

Angulo de ataque(°): -0.30506

Angulo de derrapagem(°): 0

Angulo de atitude(°): -0.30506

Angulo de inclinação lateral(°): 0

Deflexão do profundor(°): -0.044079

Deflexão do aileron(°): 0

Deflexão do leme(°): 0

- Asas niveladas ($\phi = 0$);
- Pedal neutro ($\delta r = 0$);
- Aileron neutro ($\delta a = 0$);
- $\theta_E = \alpha_E$

Cálculo do equilíbrio

Vôo reto nivelado

- A seguir, repetimos os dados do slide anterior, mas para um modelo de aeronave que inclui o torque devido à rotação da hélice na dinâmica;
- Utilizaremos os seguintes dados de equilíbrio: V_E , Ω_E , H_E e β_E . Para vôo reto nivelado, $\beta_E = 0$, $\Omega_E = 0$;
- Calculamos α_E , ϕ_E , θ_E , δp_E , δa_E , δr_E , π_E .

Condições de Equilíbrio

Altitude(m): 30

Velocidade(m/s): 33

Omega(°/s): 0

Angulo de Derrapagem (°): 0

Resultados do Equilíbrio

Manete(%): 98.9128

Angulo de ataque(°): -0.30507

Angulo de derrapagem(°): 0

Angulo de atitude(°): -0.30507

Angulo de inclinação lateral(°): 0.081133

Deflexão do profundor(°): -0.044077

Deflexão do aileron(°): -1.2866

Deflexão do leme(°): -0.27991

- Note que, nesse caso, leme e aileron são não nulos, com o objetivo de compensar o torque do motor.

Cálculo do equilíbrio

Observações

- Deve-se ter em mente que as deflexões apresentadas correspondem ao equilíbrio, e não aos movimentos necessários para levar a aeronave do vôo reto para a curva estabilizada;
- Naturalmente, para iniciar uma curva à direita, deve-se mover o manche à direita, muito embora o comando possa ser à esquerda no equilíbrio.