

Linearização das equações do movimento completo

AB-722

Flávio Luiz Cardoso Ribeiro

<http://flavioluiz.github.io>

flaviocr@ita.br

Departamento de Mecânica do Voo
Divisão de Engenharia Aeronáutica e Aeroespacial
Instituto Tecnológico de Aeronáutica



2018

Introdução

- Conhecido o equilíbrio, podemos estudar o comportamento dinâmico da aeronave em torno dessa condição;
- A resposta autônoma da aeronave mostra como ela se comporta quando sofre uma perturbação a partir da condição de equilíbrio. Trata-se do estudo da estabilidade;
- As características dinâmicas em malha aberta podem ser alteradas/melhoradas através da implementação de sistemas de aumento de estabilidade ou sistemas automáticos de voo;
- Para o estudo da estabilidade iremos inicialmente escrever as equações da dinâmica do movimento completo na forma linearizada.

Equações do Movimento

Conforme visto anteriormente, temos as seguintes 12 equações do movimento completo:

Dinâmica de translação:

$$\dot{V} = \frac{F_{ext,x} \cos \alpha \cos \beta + F_{ext,y} \sin \beta + F_{ext,z} \cos \beta \sin \alpha}{m}$$

$$\dot{\alpha} = q - \tan \beta (p \cos \alpha + r \sin \alpha) + \frac{\sec \beta (F_{ext,z} \cos \alpha - F_{ext,x} \sin \alpha)}{mV}$$

$$\dot{\beta} = \frac{F_{ext,y} \cos \beta - \cos \alpha (mrV + F_{ext,x} \sin \beta) + \sin \alpha (mpV - F_{ext,z} \sin \beta)}{mV}$$

Dinâmica de rotação:

$$I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} + (I_{zz} - I_{yy})qr - I_{xz}pq = l_a$$

$$I_{yy} \dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp + I_{xz}(p^2 - r^2) = m_a + m_F$$

$$I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + (I_{yy} - I_{xx})pq + I_{xz}rq = n_a$$

Equações do Movimento

Cinemática de translação:

$$\dot{x} = u \cos \Theta \cos \Psi + v(\sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi) + w(\cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi)$$

$$\dot{y} = u \cos \Theta \sin \Psi + v(\cos \Phi \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi) + w(-\sin \Phi \cos \Psi + \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi)$$

$$\dot{H} = u \sin \Theta - v \sin \Phi \cos \Theta - w \cos \Phi \cos \Theta$$

Cinemática de rotação:

$$\dot{\Phi} = p + q \sin \Phi \tan \Theta + r \cos \Phi \tan \Theta$$

$$\dot{\Theta} = q \cos \Phi - r \sin \Phi$$

$$\dot{\Psi} = q \sin \Phi / \cos \Theta + r \cos \Phi / \cos \Theta$$

Linearização

Para o movimento completo da aeronave, temos um conjunto de 12 estados e 4 controles, formando um sistema na forma:

$$\dot{X} = f(X, u)$$

onde f é função não-linear dos estados:

$$X = [V \quad \alpha \quad \beta \quad p \quad q \quad r \quad \Phi \quad \theta \quad \psi \quad x \quad y \quad H]^T$$

$$\text{e dos controles: } u = [\pi \quad \delta p \quad \delta a \quad \delta r]^T$$

Desejamos linearizar as equações para:

- Permitir a aplicação de técnicas de controle linear;
- Efetuar um estudo da estabilidade dinâmica da aeronave.

Linearizando, teremos:

$$\dot{X} = AX + BU$$

Linearização

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{\Phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{H} \end{bmatrix} = f(X, U) = \begin{bmatrix} f_V \\ f_\alpha \\ f_\beta \\ f_p \\ f_q \\ f_r \\ f_\Phi \\ f_\theta \\ f_H \end{bmatrix}$$

Linearizando por exemplo a primeira linha (em torno do equilíbrio), fica:

$$\dot{V} = f_V(X, U) = f_u(V, \alpha, \beta, p, q, r, \Phi, \theta, H, \pi, \delta p, \delta a, \delta r)$$

$$\dot{V} = f_{V_{eq}} + \frac{\partial f_V}{\partial V_{eq}} (V - V_{eq}) + \frac{\partial f_V}{\partial \alpha_{eq}} (\alpha - \alpha_{eq}) + \dots$$

E de maneira análoga para os demais estados:

$$\dot{\alpha} = f_{\alpha_{eq}} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial V_{eq}} (V - V_{eq}) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha_{eq}} (\alpha - \alpha_{eq}) + \dots$$

...

Estabilidade

Conforme visto no primeiro bimestre, a teoria de sistemas lineares invariantes no tempo permitem chegar às conclusões sobre a estabilidade dinâmica do sistema com base nos autovalores λ_i da matriz A :

- $Re(\lambda_i) < 0$ - Dinamicamente estável;
- $Re(\lambda_i) > 0$ - Dinamicamente instável.

E ainda:

- $Im(\lambda_i) = 0$ - Não oscilatório;
- $Im(\lambda_i)$ não nulo - Oscilatório.

Estabilidade

Em aeronaves convencionais, os cinco autovalores associados ao movimento longitudinal são:

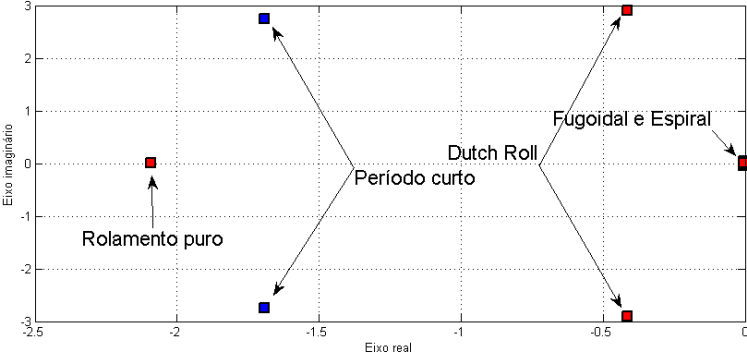
- Um par complexo conjugado mais próximo da origem (período curto);
- Um par complexo conjugado mais afastado da origem (fugoidal);
- Um autovalor sobre o eixo real (fugoidal).

Como temos 4 novos estados associados ao movimento látero-direcional (v ou β , p , r e Φ), a dinâmica completa inclui mais quatro autovalores:

- Um par complexo conjugado (Dutch Roll);
- Um autovalor sobre o eixo real próximo da origem (espiral);
- Um autovalor sobre o eixo real afastado da origem (rolamento puro).

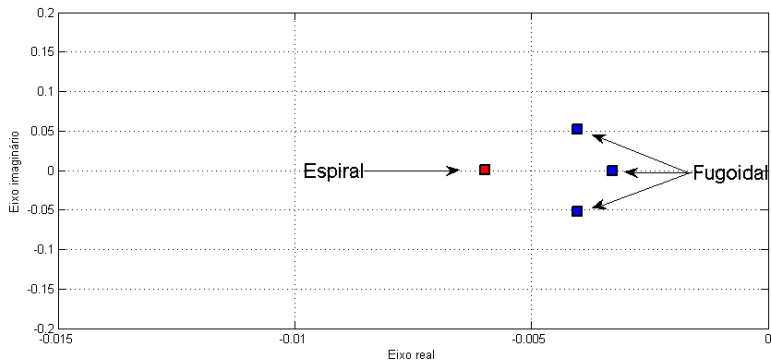
Estabilidade

Exemplo de autovalores da dinâmica completa para o A310:



Estabilidade

Exemplo de autovalores da dinâmica completa para o A310 (apenas autovalores mais lentos, próximos da origem):



Movimento de pequenas perturbações

- No estudo do movimento longitudinal, aplicamos algumas hipóteses simplificadoras que desacoplavam do movimento látero-direcional;
- Vimos que no movimento longitudinal, era possível desacoplar o movimento em dois modos: período curto e fugoidal;
- Veremos que a resposta látero-direcional pode ser desacoplada em três movimentos independentes;
- Deve-se ter em mente que as hipóteses simplificadoras envolvidas no estudo dos três movimentos látero-direcionais levam à aproximações mais grosseiras do que aquelas utilizadas no estudo do movimento longitudinal.

Movimento de pequenas perturbações

Hipóteses simplificadoras para o movimento látero-direcional:

- Forças e momentos aerodinâmicos linearizados;
- Movimento longitudinal desacoplado; piloto atuando sobre manete e profundor, mantendo estados longitudinais no equilíbrio: $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{V} = 0$, $\dot{q} = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{H} = 0$;
- Ângulo de derrapagem pequeno: $\sin \beta \approx \beta$, $\cos \beta \approx 1$.

Movimento de pequenas perturbações

Sob as hipóteses apresentadas, e das equações de força lateral e momentos de guinada/rolamento, temos:

$$\begin{aligned}mV_E(\dot{\beta} - p \sin \alpha_E + r \cos \alpha_E) &= F_{ext,y} \\ I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + (I_{zz} - I_{yy})qr - I_{xz}pq &= l_a \\ I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} + (I_{yy} - I_{xx})pq + I_{xz}rq &= n_a\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}F_{ext,y} &= 0.5\rho_E S V_E^2 (C_{Y\beta} \beta C_{Y\delta_r} \delta r + C_{Y\delta_a} \delta a) + mg \sin \Phi \cos \theta_E \\ l_a &= 0.5\rho_E S b V_E^2 (C_{l\beta} \beta + C_{l\delta_r} \delta r + C_{l\delta_a} \delta a + C_{l_p} \frac{pb}{V_E} + C_{l_r} \frac{rb}{V_E}) \\ n_a &= 0.5\rho_E S b V_E^2 (C_{n\beta} \beta + C_{n\delta_r} \delta r + C_{n\delta_a} \delta a + C_{n_p} \frac{pb}{V_E} + C_{n_r} \frac{rb}{V_E})\end{aligned}$$

Somando ainda a relação cinemática:

$$\dot{\Phi} = p + q \sin \Phi \tan \Theta_E + r \cos \Phi \tan \Theta_E$$

Movimento de pequenas perturbações

Nas equações do slide anterior, temos:

- Parâmetros da aeronave (massa, inércia, derivadas de estabilidade e controle);
- Condições de voo fixadas pelo movimento longitudinal: $V_E, \rho_E, q_E, \theta_E, \alpha_E$;
- Entradas disponíveis para o piloto: $\delta a, \delta r$;
- Estados não ignoráveis: Φ, β, p, r .

Vamos estudar o desacoplamento do movimento látero-direcional em três movimentos característicos:

- Rolamento puro;
- Espiral;
- Dutch-Roll.

Movimento de pequenas perturbações

Rolamento Puro

Vamos supor que o avião possui apenas um grau de liberdade (rolamento), em torno do eixo X_B :

$$\delta r = 0, r = 0, \beta = 0$$

A aeronave encontra-se em equilíbrio longitudinal: $q = 0$.

Sob tais hipóteses, a equação do momento em torno de X torna-se:

$$\dot{p} - l_p p = l_{\delta a} \delta a$$

onde: $l_p = \frac{\rho_E S V_E^2 b}{2I_{xx}} C_{l_p}$, $l_{\delta a} = \frac{\rho_E S V_E^2 b}{2I_{xx}} C_{l_{\delta a}}$.

Movimento de pequenas perturbações

Rolamento Puro

$$\dot{p} - l_p p = l_{\delta a} \delta a$$

Resposta forçada:

Uma entrada do tipo degrau no aileron tem a seguinte resposta:

$$p(t) = -\frac{l_{\delta a}}{l_p} (1 - e^{l_p t}) \delta a$$

Movimento de pequenas perturbações

Rolamento Puro

$$\dot{p} - l_p p = l_{\delta a} \delta a$$

Resposta autônoma:

Na resposta autônoma, temos a seguinte equação:

$$\dot{p} - l_p p = 0$$

Para uma perturbação inicial Δp na velocidade de rolamento, temos a seguinte resposta:

$$p(t) = \Delta p e^{l_p t}$$

- Note que o amortecimento, logo, o autovalor real associado ao movimento de rolamento puro é dado por l_p ;
- O movimento de rolamento puro pode ser interpretado com as características de resposta da aeronave ao movimento de rolamento, seja ele induzido pelo piloto através do aileron ou originado de perturbações externas.

Movimento de pequenas perturbações

Espiral

Hipóteses:

- β , p e r variam lentamente, logo, momentos e forças de inércia são pequenos e os aerodinâmicos dominam: $\dot{\beta} \approx 0$, $\dot{p} \approx 0$ e $\dot{r} \approx 0$
- Inclinação das asas pequena: $\cos \Phi \approx 1$, $\sin \Phi \approx \Phi$;
- Ângulo de arfagem pequeno $\theta \approx 0$;
- Superfícies de controle na posição de equilíbrio: $\delta p = 0$, $\delta a = 0$.

Sob essas hipóteses, as equações do movimento tornam-se:

$$V_E r - Y_\beta \beta - g \Phi = 0$$

$$l_\beta \beta + l_r r + l_p p = 0$$

$$n_\beta \beta + n_r r + n_p p = 0$$

Movimento de pequenas perturbações

Espiral

Manipulando as 3 equações, chega-se à:

$$(Wr) - g\dot{\Phi} = 0 \quad \text{onde:}$$

$$\begin{aligned} W &= V_E + Y_\beta \frac{Q_{Pr}}{Q_{P\beta}} \\ Q_{Pr} &= l_p n_r - l_r n_p \\ Q_{P\beta} &= l_p n_\beta - l_\beta n_p \end{aligned}$$

Derivando a equação acima:

$$\dot{r} = \frac{g}{W} \dot{\Phi}$$

Sob as hipóteses, temos que: $\dot{\Phi} = p \rightarrow \dot{r} = \frac{g}{W} p$

Substituindo p nas expressões anteriores, chega-se à:

$$\dot{r} + \frac{g}{W} \frac{Q_{r\beta}}{Q_{p\beta}} r = 0$$

$$\text{onde: } Q_{r\beta} = l_r n_\beta - l_\beta n_r$$

Movimento de pequenas perturbações

Espiral

$$\dot{r} + \frac{g}{W} \frac{Q_{r\beta}}{Q_{p\beta}} r = 0$$

Empregando o sistema de 3 equações acima, ODEs análogas são obtidas para p , β e Φ .

$$p = \bar{p}e^{at}, r = \bar{r}e^{at}, \beta = \bar{\beta}e^{at}, \Phi = \bar{\Phi}e^{at}$$

Onde 'a' é o amortecimento, dado por: $a = -\frac{g}{W} \frac{Q_{r\beta}}{Q_{p\beta}}$

- W é bastante próximo de V_E , pois o segundo termo é, em geral, pequeno;
- $Q_{p\beta}$ é, em geral, negativo;
- Portanto, o sinal de 'a' é o mesmo de $Q_{r\beta}$.

Assim, se $Q_{r\beta}$ for negativo, o movimento é amortecido.

Movimento de pequenas perturbações

Espiral

- Se $Q_{r\beta}$ for negativo, toda perturbação que tende à desnivelar as asas do avião será corrigida. Caso contrário, a perturbação tenderá a se amplificar e as asas tenderão a inclinar cada vez mais. A aeronave entra, então, em um movimento espiral tendendo à 'cair de asa';
- Por sua importância associada ao movimento espiral, o parâmetro $Q_{r\beta}$ é chamado de coeficiente de estabilidade espiral.
- Muitas aeronaves possuem movimento espiral instável e, no entanto, não apresentam grandes dificuldades de pilotagem. Isso ocorre pelo fato de o movimento ser muito lento (pólo próximo da origem), e corrigido naturalmente pelo piloto.

Movimento de pequenas perturbações

Espiral

Uma outra interpretação física do movimento espiral pode ser feita, chegando ao mesmo resultado:

- Imagine que a aeronave sofra uma inclinação que abaixe a asa direita ($\Phi > 0$);
- Surge, do equilíbrio de forças em Y, uma derrapagem positiva $\beta > 0$:

$$Y_{\beta}\beta + g\Phi = 0 \rightarrow \beta = -\frac{g}{Y_{\beta}}\Phi$$

- A derrapagem induz uma guinada, logo, uma velocidade de guinada ($r > 0$) dada pela equação do momento. O nariz do avião se move à direita (encarar o vento):

$$n_{\beta}\beta + n_r r = 0 \rightarrow r = -\frac{n_{\beta}}{n_r}\beta$$

Movimento de pequenas perturbações

Espiral

- A derrapagem e a velocidade de guinada (r) fazem surgir um momento de rolamento. Se esse momento de rolamento for negativo, a aeronave tenderá a recuperar a condição de asas niveladas:

$$l_{\beta}\beta + l_r r < 0 \rightarrow l_{\beta} - l_r \frac{n_{\beta}}{n_r} \beta < 0$$

Como $\beta > 0$, a inclinação das asas será recuperada se:

$$Q_{r\beta} = l_r n_{\beta} - l_{\beta} n_r < 0$$

Movimento de pequenas perturbações

Dutch-Roll

Movimento Dutch-Roll (oscilação de derrapagem ou lateral)

- Vamos assumir que Φ , Y_β , α e p são desprezíveis na equação de força lateral, logo:

$$\dot{\beta} = -r$$

- Equilíbrio longitudinal: $q = 0$;
- Deflexões de profundor e aileron nulas;

As equações de momento tomam então a forma:

$$\dot{p} = l_p p + l_r r + l_\beta \beta$$

$$\dot{r} = n_p p + n_r r + n_\beta \beta$$

Movimento de pequenas perturbações

Dutch-Roll

Em forma matricial as três equações ficam:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_p & l_r & l_\beta \\ n_p & n_r & n_\beta \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \\ \beta \end{bmatrix}$$

O polinômio característico do sistema é:

$$p(s) = (l_p - s)[s(n_r - s) - n_\beta] + n_p(l_\beta - sl_r)$$

Em geral, n_p é pequeno e podemos obter soluções aproximadas:

$$s = l_p$$

$$s^2 - n_r s + n_\beta = 0$$

Movimento de pequenas perturbações

Dutch-Roll

$$s = l_p$$

$$s^2 - n_r s + n_\beta = 0$$

- A primeira solução corresponde ao movimento de rolamento puro;
- A segunda corresponde à um movimento oscilatório com:

$$\omega_n = \sqrt{n_\beta} \text{ e } \xi = -\frac{n_r}{2\sqrt{n_\beta}}$$

- Esse é o movimento de Dutch-Roll, marcado por oscilações, em geral amortecidas, nas variáveis associadas ao movimento látero-direcional;

Movimento de pequenas perturbações

Dutch-Roll

- Um jeito bastante fácil de se notar o movimento de dutch-roll na prática é o seguinte: nivelar a aeronave em vôo horizontal e, em seguida, aplicar uma perturbação do tipo doublet no pedal. Nota-se que a aeronave irá oscilar lateral e direcionalmente. Isso pode ser bem observado olhando-se para a ponta da asa e o movimento que ela descreve.